ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

«Αναλυτικά Προγράμματα Μαθησιακών Δυσκολιών-Ενημέρωση-Ευαισθητοποίηση»

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΤΕΥΧΟΣ Β΄

ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

Μ. Τζεκάκη

σε συνεργασία με

Π. Σταγιόπουλο, Γ. Μπαραλό

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Έννοιες κατά Θεματικό άξονα για την Β’ Τάξη

- ### Εξισώσεις και ανισώσεις

Εξισώσεις α’ βαθμού		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Χρήση μεταβλητών Αναζήτηση του άγνωστου με νοερούς υπολογισμούς	Να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της καθημερινής Να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης και τη σχετική ορολογία. Να επιλύουν εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.	Χρησιμοποιούν μεταβλητές Αναζητούν τον άγνωστου με νοερούς υπολογισμούς Επιλύουν απλές εξισώσεις α’ βαθμού
Απλές εξισώσεις σε πραγματικές καταστάσεις	Να επιλύουν ένα τύπο ως προς μία μμεταβλητή, θεωρώντας τον ως εξίσωση με άγνωστο τη μεταβλητή Να διακρίνουν τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος. Να κάνουν εισαγωγή του αγνώστου. Να καταστρώνουν την εξίσωση, να την επιλύουν, να ελέγχουν το αποτέλεσμα και να καταγράφουν την απάντηση.	Βρίσκουν ένα άγνωστο σε ένα τύπο Μετατρέπουν ένα απλό πρόβλημα σε εξίσωση

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Οι μαθητές έχουν εισαχθεί στις απλές μορφές εξισώσεων από την προηγούμενη τάξη. Στην ενότητα αυτή έρχονται σε μεγαλύτερη επαφή με τις αλγεβρικές μορφές και τις αλγεβρικές πράξεις. Αυτό αντικαθιστά βαθμιαία στα μαθηματικά έργα τους αριθμούς με σύμβολα όπως τα χ, ψ, α, β κλπ.

Τα σύμβολα έρχονται να παραστήσουν ένα σύνολο αριθμών ή άλλων στοιχείων και κατά συνέπεια αφορούν διαφορετικές καταστάσεις, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε πολλές παρανοήσεις.

- Αρχικά, τέτοια σύμβολα χρησιμοποιούνται για να παραστήσουν έναν άγνωστο όπως στην εξίσωση x+5= 22. Το ρόλο αυτό σε μικρότερες τάξεις είχαν άλλες συμβολικές μορφές όπως τα σχήματα: □ +5=22.
- Αντίστοιχα σύμβολα χρησιμοποιούνται για να παραστήσουν ιδιότητες ή σχέσεις όπως α+β = β+α. Την ίδια χρήση έχουν τα γράμματα στις ταυτότητες.
- Τέλος, τα ίδια σύμβολα παριστάνουν μεταβλητές σε μία σχέση ή σε ένα τύπο και παίζουν διαφορετικό ρόλο από ότι οι άγνωστοι, όπως συμβαίνει στις συναρτήσεις ή στους τύπους, ψ=αχ ή Ε=α.β.

Για την κάθε μία χρήση είναι απαραίτητο να αποσαφηνισθούν οι διαφορετικοί ρόλοι μέσα από διαφορετικές δραστηριότητες. Ιδιαίτερα η χρήση των χ και ψ στις συναρτήσεις που ακολουθούν, διαφοροποιείται από αυτήν που έχουν στις εξισώσεις.

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη τάξη, η χρήση των εξισώσεων αποτελεί ένα μέσο για να επιλύουμε με απλούστερο τρόπο προβλήματα και η επιδίωξή μας είναι να εξοικειωθούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν συμβολισμό για να παραστήσουν ένα πρόβλημα. Αντίστοιχη χρήση έχουν οι εξισώσεις σε επιλύσεις προβλημάτων όπως: Αν το εμβαδό ενός κύβου είναι 24 τ.ε. πόσα εκατοστά είναι η ακμή του. Εκτός από τους μαθηματικούς τύπους οι μαθητές συναντούν τέτοιες επιλύσεις και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα, όπως η Φυσική.

Δυσκολίες των μαθητών

Έχει αποδειχθεί ερευνητικά ότι οι μαθητές δείχνουν περιορισμένη κατανόηση στη χρήση συμβόλων.

Αρχικά αντιλαμβάνονται τα γράμματα ως αντικείμενα και όχι ως αριθμητικές τιμές πχ. στη σχέση 2x που εκφράζει ότι «Ο Δημήτρης έχει διπλάσια παιχνίδια από τον Γιώργο», το x εκφράζει τα παιχνίδι και όχι την ποσότητά τους.

Επίσης ο τρόπος γραφής των αλγεβρικών παραστάσεων που ακολουθούν τις αριθμητικές παραστάσεις, δημιουργούν συγχύσεις στους μαθητές, έτσι το 3α δεν σημαίνει 3 φορές το α, όπως στους αριθμούς 34 το δεν σημαίνει 3.4.

Τέλος, οι λύσεις των εξισώσεων εμπλέκουν ισότητες που αλλάζουν μορφή από τις αριθμητικές παραστάσεις. Έτσι αν το ίσον σε μία εξίσωση σημαίνει το πρώτο μέρος είναι ίσο με το δεύτερο, στις αριθμητικές παραστάσεις το ίσον σημαίνει «κάνε μια πράξη και δώσε μία απάντηση» όπως πχ. 13 + 22 =.

Διδακτικές υποδείξεις

Μεγάλο μέρος της διδασκαλίας των εξισώσεων δαπανάται στην εκμάθηση της διαδικασίας επίλυσης τους. Μερικές φορές οι μαθητές καταφέρνουν να λύνουν εξισώσεις χωρίς όμως να αντιλαμβάνονται το νόημα της διαδικασίας που ακολουθούν (Van de Walle, 2001).

Στην ενότητα αυτή, αρχικά επιδιώκεται να αντιληφθούν οι μαθητές τους ρόλους που παίζουν τα σύμβολα και η γραφή τους, ιδιαίτερα το ρόλο του αγνώστου, μέσα από διαφορετικές χρήσεις σε κατάλληλες δραστηριότητες.

Στη συνέχεια ενθαρρύνονται να παριστάνουν συμβολικά μια κατάσταση δημιουργώντας σχέσεις από λεκτικά προβλήματα.

Στο τέλος μόνο οδηγούνται να κατανοήσουν την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης, εμβαθύνοντας μέσα από δραστηριότητες, τη διατήρηση της ισότητας των δύο μερών της εξίσωσης.

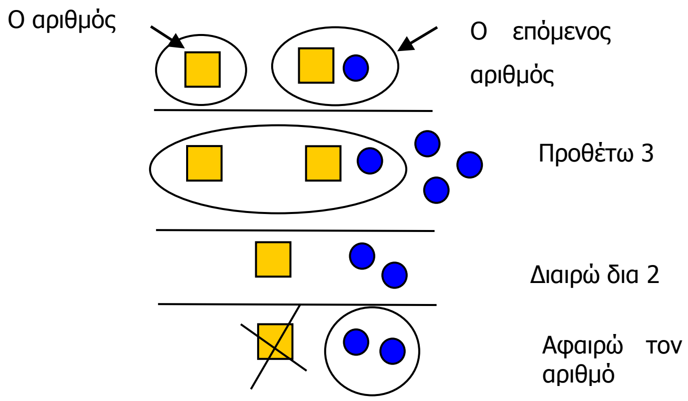
Αν και το μοντέλο της ζυγαριάς δεν καλύπτει εννοιολογικά όλες τις περιπτώσεις λύσεις μια εξίσωσης, ωστόσο είναι χρήσιμο για την κατανόηση αυτής της ισότητας.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

Μαγικό τρυκ: Διάλεξε ένα αριθμό, πρόσθεσε σε αυτόν τον επόμενό του, πρόσθεσε το 3 και διαίρεσε το αποτέλεσμα δια 2. Αφαίρεσε τον αριθμό με τον οποίο άρχισες. Το αποτέλεσμα είναι 2.

(*αν το παιδιά δυσκολεύονται στα σύμβολα μπορούν να δοκιμάσουν με υλικά,*
 *είναι ο αριθμός και*  *είναι μια μονάδα*).



Δραστηριότητα 2η

Ο Γιάννης έχει κάποιους βόλους. Η Μαριάννα του έδωσε 17 βόλους. Τώρα ο Γιάννης έχει 45 βόλους. Πόσους είχε στην αρχή. Επαλήθευσε τα αποτελέσματα.

Ο πατέρας του Ανδρέα είναι 47 χρονών. Μετά από 28 χρόνια ο Ανδρέας θα έχει την ηλικία του πατέρα του. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής x γράψε μια ισότητα που να περιγράφει την κατάσταση αυτή. Πόσο χρονών είναι σήμερα ο Ανδρέας;

Δραστηριότητα 3η

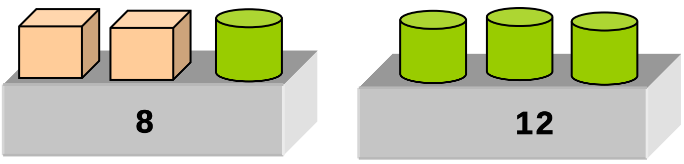
- Εξέτασε ποιος από τους αριθμούς 20, 18, 30, 19, 21 επαληθεύει την εξίσωση $x - 15 = 4$
- Κάνε το ίδιο για τους αριθμούς 5, 8, 15, 20, 50 και την εξίσωση $2 \cdot x = x + x$. Τι παρατηρείς;

Δραστηριότητα 4η

Με πόσα τετράγωνα θα ισορροπήσουν οι δύο σφαίρες στη δεύτερη ζυγαριά;

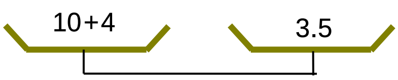
Δραστηριότητα 5η

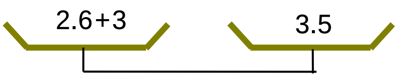
Πόσο ζυγίζει κάθε σχήμα;



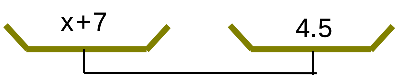
Δραστηριότητα 6η

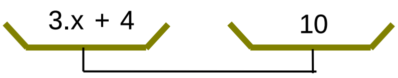
Ισορροπεί ή γέρνει η ζυγαριά;





Ποια τιμή πρέπει να βάλεις στο x για να ισορροπεί η ζυγαριά;





Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Βρες με το νου το x στις παρακάτω εξισώσεις:
   x + 12 = 30 15 – x = 7 5.x + 2 = 12

2. Υπολόγισε τις παρακάτω σχέσεις για x = 3 ή x = 6 ή x = 9 και ανάλογα με το αποτέλεσμα βάλε το σύμβολο < ή = ή >.
   4.x + 5 29 35 – 3.x 8

3. Ο τύπος Ε = β.υ δίνει τον εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάση β και ύψος υ. Αν η βάση ενός παραλληλογράμμου είναι 15m και το εμβαδόν του 105 m^2, πόσο είναι το ύψος του;

Ανισώσεις α' βαθμού		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουν τις λύσεις στον άξονα. Να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δυο ή περισσότερων ανισώσεων πρώτου βαθμού. Να λύνουν απλά προβλήματα ανισώσεων πρώτου βαθμού.	Συνδέουν την ανίσωση με μία εξίσωση. Βρίσκουν τις τιμές του x με νοερούς υπολογισμούς. Λύνουν απλά προβλήματα ανισώσεων πρώτου βαθμού.

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Η ανίσωση διαφοροποιείται από την εξίσωση ως προς τις λύσεις. Για το λόγο αυτό, αν κι οι μαθητές γνωρίζουν να αναζητούν, νοερά ή επιλύοντας, μία τιμή για τον άγνωστο x σε μια εξίσωση, στην ανίσωση χρειάζεται να αναζητήσουν ένα σύνολο τιμών.

Η λύση της ανίσωσης, σε επίπεδο διαδικασίας, δεν αλλάζει από τη λύση μιας εξίσωσης, το νόημά της όμως είναι σημαντικά διαφορετικό. Έτσι, στην ενότητα αυτή δεν επιδιώκεται να μάθουν τυπικά οι μαθητές να λύνουν ανισώσεις, αλλά να προσεγγίζουν το νόημά της.

Δυσκολίες των μαθητών

Σύμφωνα με τα στοιχεία που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα για την κατανόηση συμβόλων και μεταβλητών, η σχέση x>3 δεν ερμηνεύεται από τους μαθητές ως «*όλες οι τιμές για τις οποίες ισχύει*».

Η χρήση των ανισοτικών συμβόλων που παρουσιάζονται από τις μικρότερες τάξεις του δημοτικού ανάμεσα στους αριθμούς είναι δηλωτικές μιας σύγκρισης μεταξύ δύο αριθμών, πχ. 12 > 10. Η προηγούμενη εύρεση *μιας* τιμής για το x στις εξισώσεις και η χρήση ανισοτικών συμβόλων σε αυτή τη μορφή δυσκολεύουν στους μαθητές να κατανοήσουν ότι το χ> 10 σημαίνει «*όλες οι τιμές του χ οι οποίες είναι μεγαλύτερες του 10*».

Διδακτικές υποδείξεις

Προτείνονται πραγματικές καταστάσεις μέσα από τις οποίες αναδεικνύεται η αναγκαιότητα χρήσης ανισότητας και οι οποίες οδηγούν στην εύρεση ενός συνόλου λύσεων που επιτρέπουν την κατανόηση του νόηματος του συμβόλου, πχ. x>4.

Παράλληλα, ενθαρρύνονται οι νοεροί υπολογισμοί στην αναζήτηση λύσεων και επιδιώκεται να αντιληφθούν οι μαθητές ότι οι ανισώσεις δεν έχουν μία και μόνο λύση. Η αριθμητική γραμμή μπορεί να στηρίξει αναπαραστατικά αυτή την προσέγγιση.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα $1^{η}$

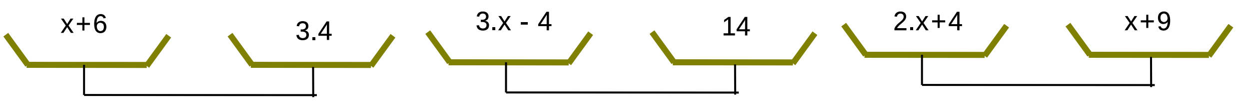
Η Λυδία έχει τα γενέθλια της και πηγαίνει στο σούπερ μάρκετ να πάρει αναψυκτικά, πατατάκια και άλλα κεράσματα για το πάρτυ της. Έχει από το χαρτζιλίκι της 10 € αλλά υπολογίζει ότι θα χρειαστεί *περισσότερα* από 30 € για τα ψώνια της. Πόσα χρήματα θα χρειαστεί να ζητήσει από τη μαμά της;

Δραστηριότητα $2^{η}$

Ο Δημήτρης πηγαίνει στην αγορά για να ψωνίσει ένα παντελόνι και μία μπλούζα κι έχει μαζί του 75€. Το παντελόνι που του αρέσει στοιχίζει 45 €. Βλέπει στις βιτρίνες μπλούζες με διάφορες τιμές: 10, 12, 15, 22, 35, 40 € ποιες από αυτές μπορεί να αγοράσει;
Αν ονομάσεις την τιμή της μπλούζας ψ, δοκίμασες να γράψεις μια σχέση που να δίνει απάντηση στο ερώτημα «*μέχρι πόσα χρήματα το πολύ μπορεί να στοιχίζει η μπλούζα*;».

Δραστηριότητα $3^{η}$

Βάλε στο x τις τιμές 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12 και εξέτασε από πού γέρνει η κάθε ζυγαριά. Βάλε ένα σύμβολο <, +, >.



Δραστηριότητα $4^{η}$

Υπολόγισε με το νου ποια τιμή μπορεί να πάρει το x στις παρακάτω ανισώσεις:

x > 5 2. x > 24 x + 7 < 20 x – 10 > 50

Χρωμάτισε τις απαντήσεις πάνω στην αριθμογραμμή.

Δραστηριότητα 4η

Λύσε κάθε μία από τις ανισώσεις όπως λύνεις μια εξίσωση και δοκίμασε να ερμηνεύσεις το αποτέλεσμα. Χρωματίστε πάνω στην αριθμογραμμή.

$x + 12 > 25$ $\psi - 7 > 5$ $4.\omega > 16$ $2.x - 3 < x + 1$

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Ποια είναι η διαφορά μιας ανίσωσης από μία εξίσωση;
2. Πόσες τιμές μπορεί να πάρει ο x στην ανίσωση $x + 2 > 10$;
3. Χρωμάτισε πάνω στην αριθμητική γραμμή τις λύσεις των παρακάτω σχέσεων:

$x - 5 < 7$ $x - 5 = 7$ $x - 5 > 7$

Πυθαγόρειο θεώρημα, τετραγωνικές ρίζες και άρρητοι αριθμοί		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Τελικοί στόχοι για μαθητές με Μ.Δ.**
	-Να μπορούν να διατυπώνουν λεκτικά και συμβολικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα - Να διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους - Να μπορούν να βρίσκουν προσεγγιστικά την τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού - Να ξέρουν και να εφαρμόζουν σωστά τις ιδιότητες των ριζών	Διατυπώνουν λεκτικά και συμβολικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του Βρίσκουν μία (οποιαδήποτε) πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν είναι γνωστές οι δύο άλλες πλευρές του
		Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους Γνωρίζουν τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού Ξέρουν τις βασικές ιδιότητες των ριζών

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Η κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος με το οποίο εισάγεται η Ευκλείδεια Μετρική Γεωμετρία είναι σημαντική και απαραίτητη για την αντιμετώπιση πολλών προβλημάτων.

Η επιδίωξη της ενότητας αυτής είναι να κατανοήσουν οι μαθητές την ιδιαίτερη αυτή μετρική σχέση που συνδέεται (και αποδεικνύει) τα ορθογώνια τρίγωνα.

Η προσέγγιση των άρρητων αριθμών είναι αρκετά ιδιαίτερη και το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί και να έρθουν σε επαφή με ορισμένους χαρακτηριστικούς άρρητους όπως είναι το π και οι τετραγωνικές ρίζες μη τετράγωνων αριθμών. Παράλληλα επιδιώκεται, μέσα από την τοποθέτηση στην αριθμογραμμή να τους συνδέσουν με τους υπόλοιπους αριθμούς.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές με ΜΔ, όπως και οι υπόλοιποι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίσουν δυσκολίες στην κατανόηση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος για μια ποικιλία λόγων, που συναρτώνται κυρίως με ελλείψεις σε προηγούμενες γεωμετρικές ή αριθμητικές έννοιες όπως είναι:

- η δυσκολία αντίληψης του ορθογώνιου τριγώνου σε μη στερεοτυπικές θέσεις.
- Η μη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και σύνδεσης του τετραγώνου αριθμού με το εμβαδόν του αντίστοιχου τετραγώνου.
- Πράξεις, λύση εξισώσεων και προσέγγισης της τετραγωνικής ρίζας

Για τις τετραγωνικές ρίζες πρέπει αποσαφηνίσουν ότι ορίζονται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς και είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί. Ένα συνηθισμένο λάθος είναι ότι : $\sqrt{4} = \pm 2$.

Η έννοια των ρητών αριθμών είναι αρκετά σύνθετη και η πλήρης κάλυψής τους είναι μάλλον δύσκολο. Ωστόσο οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν κάποιες τετραγωνικές ρίζες (αν και δεν πρέπει να αναπτύξουν τη λαθεμένη αντίληψη των μαθητών είναι ότι άρρητοι αριθμοί είναι μόνο οι τετραγωνικές ρίζες των μη τετράγωνων αριθμών). Συχνά επίσης οι μαθητές μεταφέρουν ιδιότητες από τους ρητούς στους άρρητους όπως $\sqrt{a} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{a+\beta}$.

Διδακτικές υποδείξεις

Βασική προϋπόθεση για την κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος είναι η εξασφάλιση ορισμένων προαπαιτουμένων γνώσεων όπως:

- Η ευχέρεια στις πράξεις. Με δεδομένες τις σχετικές δυσκολίες σ' αυτό το πεδίο για τους μαθητές με ΜΔ είναι προτιμότερο να επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής
- Η λύση εξισώσεων της μορφής αx+β = 0 και γι' αυτό είναι απαραίτητο να γίνει σχετικός έλεγχος πριν την διδασκαλία του Π.Θ.
- Η κατανόηση της εννοίας του εμβαδού.
- Η αναγνώριση των κάθετων πλευρών και της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου. Γι' αυτό πρέπει να δίνονται ορθογώνια τρίγωνα σε διάφορες θέσεις και να ζητείται η αναγνώριση των πλευρών τους από τους μαθητές

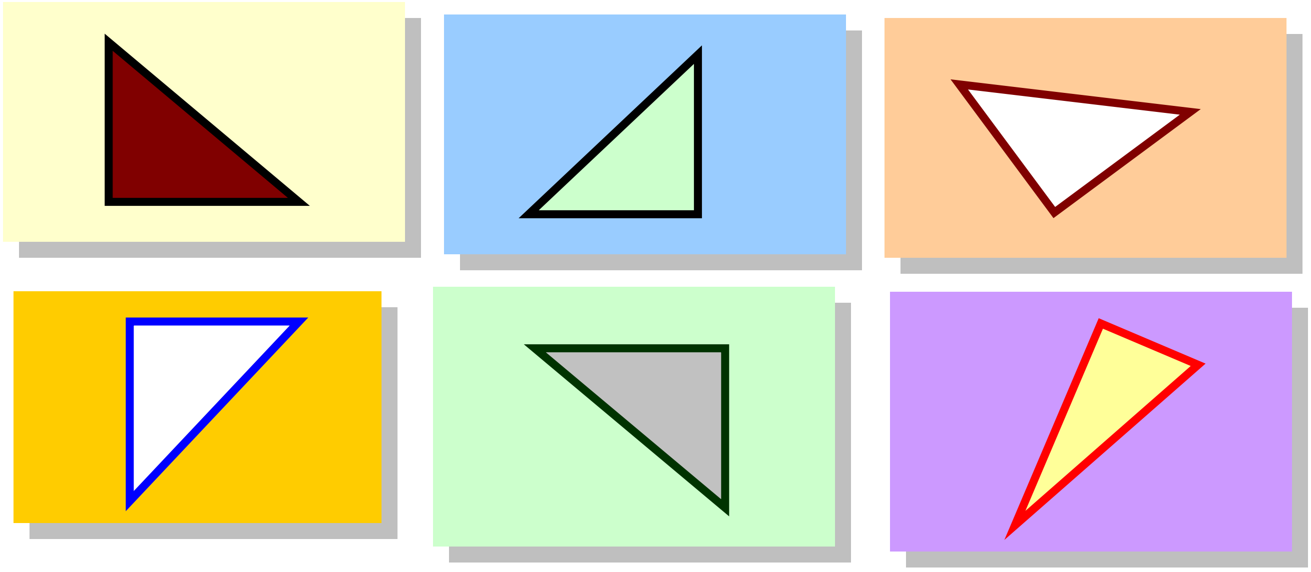
Η τετραγωνική ρίζα συνδέεται άμεσα με το τετράγωνο ενός αριθμού, οπότε ο λογισμός των ριζών στηρίζεται στις ιδιότητες των δυνάμεων τις οποίες θα πρέπει να ξέρουν οι μαθητές. Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο πρόσημο μιας τετραγωνικής ρίζας και να δοθούν αριθμητικά παραδείγματα με μικρούς αριθμούς για γίνουν κατανοητές από τους μαθητές.

Είναι σημαντικό να εντοπίσουν μόνοι τους οι μαθητές με δοκιμές τις τετραγωνικές ρίζες που είναι ρητοί αριθμοί όπως π.χ. $\sqrt{9}, \sqrt{25}$ και οι ρίζες που παραπέμπουν σε άρρητους αριθμούς. Παράλληλα μπορεί να δοθεί το παράδειγμα του π που είναι άρρητος αν και όχι ρίζα αριθμού.

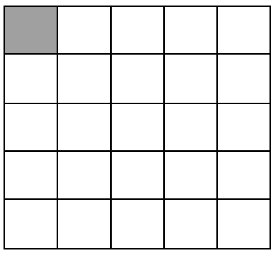
Η εύρεση τετραγωνικής ρίζας καθώς και οι ιδιότητες των ριζών είναι μάλλον έξω από τις δυνατότητες αρκετών παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες και γι' αυτό δεν επιμένουμε σε αυτές και αφήνουμε τους μαθητές να κάνουν δοκιμές με την αριθμομηχανή.

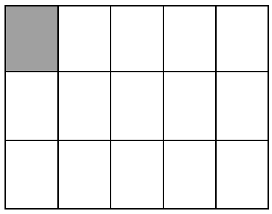
Ενδεικτικές δραστηριότητες:

1. Στα παραπάνω τρίγωνα να αναγνωρίσεις τις κάθετες πλευρές και τις υποτείνουσες τους.

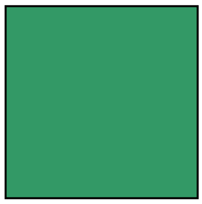


2. Να βρεις το χ στις ακόλουθες εξισώσεις: $χ^2 = 4$, $χ^2 = 25$, $χ^2 + 5 = 9$, $5 + χ^2 = 9$
3. Να βρεις το εμβαδόν στα παρακάτω σχήματα:





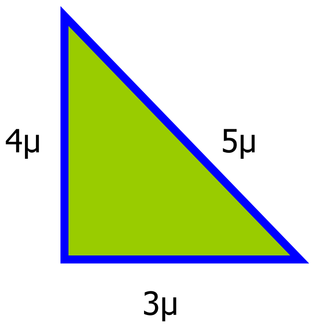
3 μ.

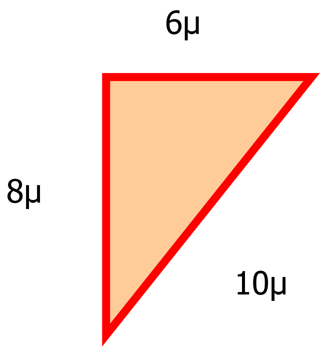


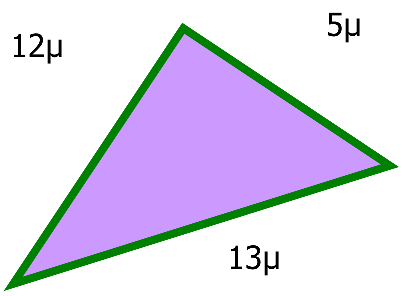
3 μ.

Δραστηριότητα 1η

Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα να υπολογίσεις τα τετράγωνα του μήκους των πλευρών τους.







Στη συνέχεια να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί.

Υποτείνουσα:	$5^2=$	$10^2=$	$13^2=$
Κάθετες πλευρές:	$4^2=$	$8^2=$	$12^2=$
	$3^2=$	$6^2=$	$5^2=$
	$3^2 + 4^2 =$	$6^2 + 8^2 =$	$5^2 + 12^2 =$

Τι παρατηρείς;

Δραστηριότητα 2η

Στο διπλανό γραμματόσημο:

- Μέτρησε τα τετραγωνάκια που υπάρχουν σε καθένα από τα καρό τετράγωνα στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου
- Τι παρατηρείς;
- Να εκφράσεις τη σχέση που βρήκες:

  Λεκτικά

  Συμβολικά

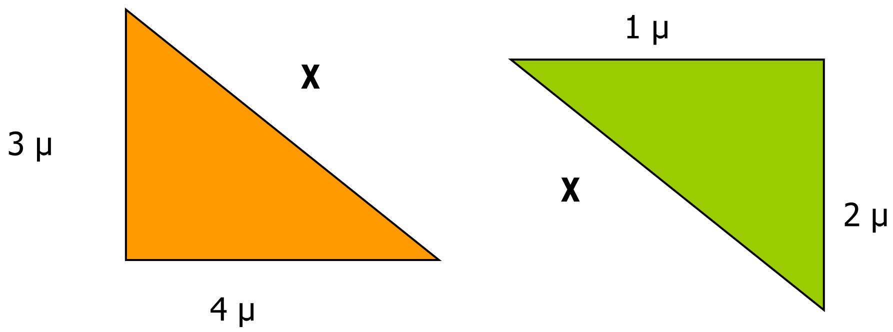
Ποια σχέση συμπεραίνεις ότι ισχύει για τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Δραστηριότητα 3η

- Να σχηματίσεις ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με 6 cm και 8 cm. Να μετρήσεις την υποτείνουσα.
- Να εξετάσεις αν για τους αριθμούς 6,8,10 ισχύει κάποια σχέση
- Κάνε το ίδιο για τους αριθμούς 3, 4 και 5. Τι είδους τρίγωνο είναι;
- Αν ένα τρίγωνο έχει μήκη τέτοια ώστε το τετράγωνο ενός από αυτά είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων, τότε τι συμπεραίνεις για το τρίγωνο αυτό;

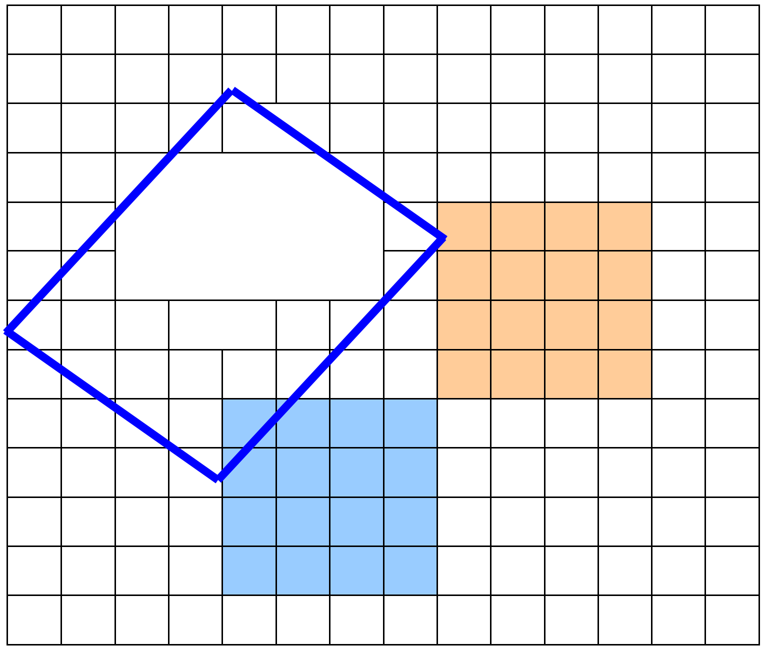
Δραστηριότητα 4η

Να υπολογίσεις την υποτείνουσα **x** στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



Δραστηριότητα 5η

Μπορείς να βρεις στο παρακάτω σχήμα πόσες τετράγωνες πλάκες ίδιου εμβαδού με τις υπόλοιπες του σχήματος θα χρειαστούμε για να καλύψουμε την περιοχή μέσα στο πλαίσιο με μπλε γραμμές;



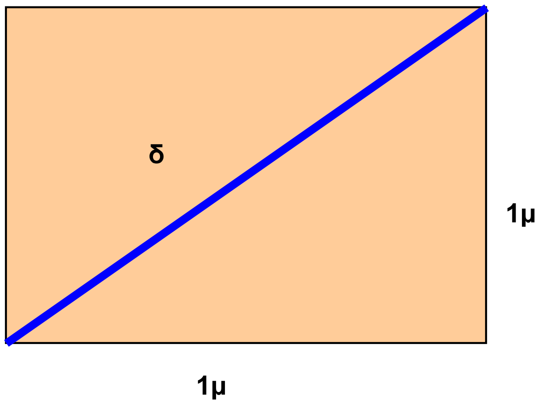
Δραστηριότητα 6η

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς γράφονται σαν κλάσματα;

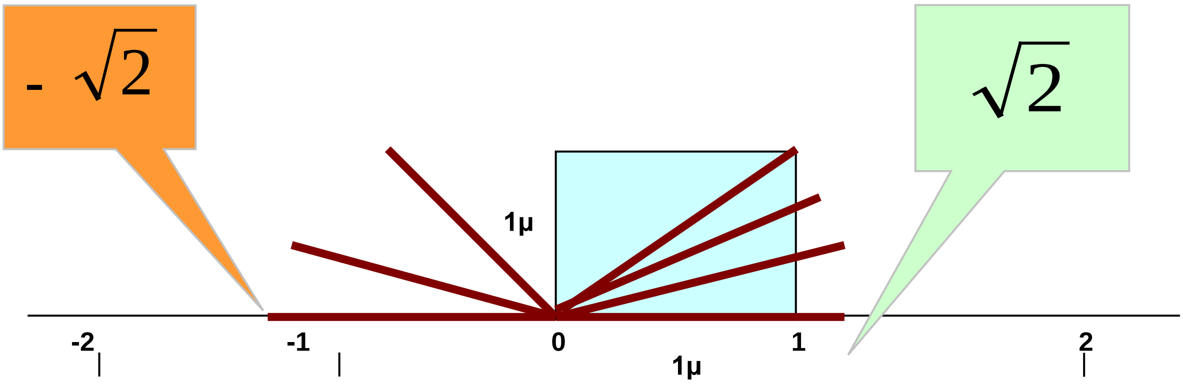
1. α = 3,5
2. β = 2,35
3. γ = 1, 12 12 12 12 ……
4. δ = 1,414414414…….
5. ε = 0,234567654323456789…..
6. ζ = 1,1234543276548942036…..

Δραστηριότητα 7η

- Να υπολογίσεις την διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές ίσες με 1μ.



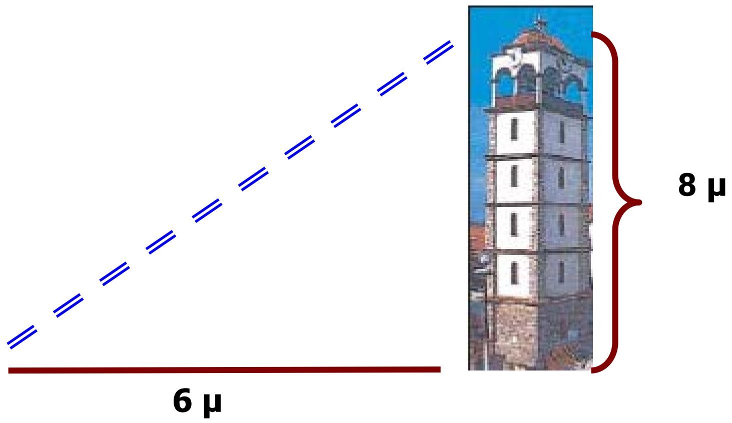
- Με κέντρο το 0 και ακτίνα ίση με τη διαγώνιο που βρήκες , γράψε ένα κύκλο μέχρι τον άξονα χ΄χ. Τι παρατηρείς για τις τετμημένες των σημείων τομής;



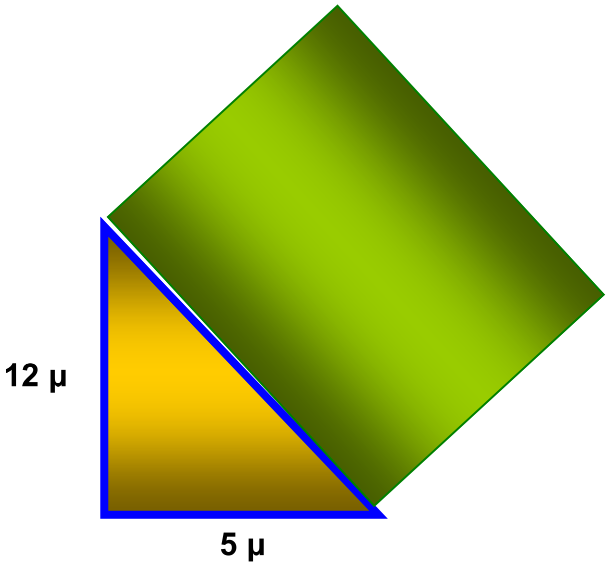
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Να διατυπώσεις λεκτικά και συμβολικά το Πυθαγόρειο θεώρημα
2. Να πάρεις ένα ορθογώνιο τρίγωνο της αρεσκείας σου, να μετρήσεις τις πλευρές του και να επαληθεύσεις το Πυθαγόρειο θεώρημα.
3. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι μεταξύ τους;

   5, $\sqrt{25}$, $\sqrt{5^2}$, $\left(\sqrt{5}\right)^2$, 25
4. Να βρείτε τα σημεία του άξονα που παριστάνουν τους αριθμούς: $\sqrt{2}$ *και* $\sqrt{3}$
5. Στο παρακάτω σχήμα, να υπολογίσεις πόσα μέτρα πρέπει να ανοίξει τη σκάλα του ένας εργάτης που θέλει να κάνει εργασίες στο καμπαναριό της εκκλησίας από τη θέση που βρίσκεται



7. Ο ιδιοκτήτης του τριγωνικού οικοπέδου του σχήματος θέλει να φυτέψει με γκαζόν τον τετραγωνικό κήπο του. Αν το κόστος για το φύτεμα ενός τετραγωνικού είναι 10 ευρώ, πόσα χρήματα θα χρειαστεί;


12 µ
5 µ

Συναρτήσεις

Αναγνώριση σχέσεων		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Γνωρίζουν την αναλογία και την αντίστροφη αναλογία Μπορούν να βρουν το συντελεστή αναλογίας, να συμπληρώνουν πίνακες και σχεδιάζουν μια γραφική παράσταση Λύνουν προβλήματα αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών	Η έννοια της συνάρτησης Η συνάρτηση ψ=αχ Η συνάρτηση ψ=αχ +β Η συνάρτηση ψ=α/χ Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών.	Παριστάνουν αριθμητικές σχέσεις σε πίνακα τιμών και εντοπίζουν τον κανόνα (κυρίως περιγραφικά) Σχεδιάζουν μια γραφική παράσταση από τον πίνακα Βρίσκουν τιμές για τα χ και ψ σε πραγματικά προβλήματα

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Οι συναρτήσεις εξετάζουν και αναπαριστούν σχέσεις. Στην καθημερινή ζωή εκφράζουμε λεκτικά τη σύνδεση καταστάσεων με διαφορετικούς παράγοντες λέγοντας: «είναι συνάρτηση του …».

Οι μαθητές έχουν γνωρίσει από τις προηγούμενες τάξης τη σχέση αναλογίας. Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται να αντιληφθούν την ιδέα της «συμμεταβολής», δηλαδή της σχέσης που συνδέει δύο μεταβλητές.

Μια συνάρτηση εκφράζει μια (ιδιαίτερη) σχέση ανάμεσα σε συμμεταβαλόμενες τιμές δύο – τουλάχιστον – μεταβλητών και έχει τρεις μορφές παράστασης: πίνακα αριθμητικών τιμών, γραφική παράσταση και συναρτησιακό τύπο.

Η επιδίωξη στην ενότητα αυτή είναι να μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν σχέσεις που προκύπτουν από πραγματικές καταστάσεις, να βρίσκουν σχέσεις από πίνακες τιμών και να «διαβάζουν» γραφικές παραστάσεις.

Δυσκολίες των μαθητών

Αν και ιδιαίτερα σημαντική, η έννοια της συνάρτησης δεν είναι απλή γιατί τυποποιεί και εκφράζει αλγεβρικά μια σχέση. Οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν σχέσεις, δεν καταφέρνουν όμως με άνεση να τις μετατρέψουν σε συναρτησιακό τύπο. Αντίστοιχα έχουν δυσκολία να περάσουν από τη μία μορφή παράστασης στην άλλη, δηλαδή από τον πίνακα τιμών στις γραφικές παραστάσεις, κι αντίστροφα από τον πίνακα τιμών στον τύπο και την αντίστοιχη παράσταση (Tall, 1996).

Στην ενότητα αυτή δεν επιδιώκεται να αντιληφθούν οι μαθητές τη γενικότερη έννοια της συνάρτησης, αλλά να εξοικειωθούν στην εύρεση σχέσεων και τη μεταφορά τους σε γραφικές παραστάσεις.

Διδακτικές υποδείξεις

Οι πρώτες προτεινόμενες δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές να προσεγγίσουν το νόημα των συναρτήσεων μελετώντας σχέσεις μέσα σε πραγματικές καταστάσεις. Στη συνέχεια ενθαρρύνονται να εκφράζουν τις σχέσεις αυτές με διάφορες μορφές παράστασης: λεκτικά, γραφικά ή με κάποιους απλούς τύπους.

Προτείνεται επίσης η μελέτη γραφικών παραστάσεων η οποία, εκτός από την γενικότερη καθημερινή της αξία, μπορεί να είναι βοηθητική στην μελέτη των σχέσεων.

Οι υπολογισμοί τιμών μέσα από αριθμητικούς πίνακες βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν την ευκολία που προσφέρουν οι συναρτησιακοί τύποι και να δοκιμάσουν να τυποποιήσουν την σχέση της αναλογίας και της αντίστροφης αναλογίας που διδάχθηκαν την προηγούμενη χρονιά. Παράλληλα τους προτείνεται να μελετήσουν και άλλες μορφές σχέσεων (σε διαφορετικά προβλήματα, της καθημερινής ζωής, της γεωμετρίας, της φυσικής κλπ.) για να μην αναγνωρίζουν σε όλα τα προβλήματα σχέσεις αναλογίας.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

Ο Κωστάκης θέλει να αγοράσει ένα καινούργιο τιμόνι για το ποδήλατο του που στοιχίζει 65 € και για το λόγο αυτό αποταμιεύει από το χαρτζιλίκι του 15 € κάθε βδομάδα. Συμπλήρωσε τον πίνακα για να βρεις πότε θα έχει συγκεντρώσει τα χρήματα που του χρειάζονται.

βδομάδες	1	2	3			
Χρήματα €	15	…				

Δραστηριότητα 2η

Ένα αυτοκίνητο χάνει το 10% της αξίας του κάθε χρόνο. Ο πατέρας του Δημήτρη αγόρασε το αυτοκίνητό του 12.000 € και θα ήθελε να ξέρει πόσο θα μπορεί να το πουλήσει σε 5 χρόνια. Ο Δημήτρης κάνει ένα πίνακα για να τον βοηθήσει.

χρόνια	1	2	3	4	5	
Μείωση σε €	1200	2400	…			

Δραστηριότητα 3η

Ένας βιολόγος παρατηρεί σε ένα μικροσκόπιο τον τρόπο με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ένα μικρόβιο και γράφει σε ένα πίνακα τα αποτελέσματα. Γράφει στο σημειωματάριο του ένα κανόνα που περιγράφει αυτό τον πολλαπλασιασμό. Δοκίμασε να γράψεις κι εσύ αυτό τον κανόνα.

Χρόνος σε sec	1	2	3	4	5	6
Αριθμός μικροβίων	1	4	9	14	25	…

Δραστηριότητα 4η

Ο Θανάσης τρέχει με το ποδήλατό του 20 km την ώρα. Ποια απόσταση θα έχει διανύσει σε 3, 4 ή 5 ώρες; Κάνε ένα πίνακα για να το υπολογίσεις την απόσταση που διανύει σε συνάρτηση με το χρόνο.

Βρες ένα τύπο που δίνει σύντομα αυτό το αποτέλεσμα.

Δραστηριότητα 5η

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20 cm. Ποιο είναι το μήκος και ποιο το πλάτος του; Βρες όλες τις δυνατές λύσεις μήκους και πλάτους και τοποθετείστε τις σε ένα πίνακα. Σχεδίασε σε τετραγωνισμένο χαρτί τα ζεύγη που βρίσκεις και σχολιάστε τη μορφή της.

Αν ονομάσουμε x το μήκος και ψ το πλάτος, μπορείς να γράψετε μια σχέση που συνδέει το x με το ψ;

Δραστηριότητα 6η

Με τέσσερα σπίρτα σχηματίζεται ένα τετράγωνο. Με επτά σπίρτα σχηματίζεται και δεύτερο τετράγωνο, δίπλα στο πρώτο. Με δέκα σπίρτα σχηματίζεται και τρίτο τετράγωνο δίπλα στα προηγούμενα. Πόσα σπίρτα χρειάζονται για τέσσερα, πέντε, έξι, επτά, δέκα, εκατό τετράγωνα; Απαντώντας, συμπλήρωσε τον πίνακα και στη συνέχεια γράψε ένα κανόνα που δίνει αυτό το αποτέλεσμα.

Πλήθος τετραγώνων	1	2	3	4	5	6	7	10	100
Πλήθος σπίρτων									

Δραστηριότητα 7η

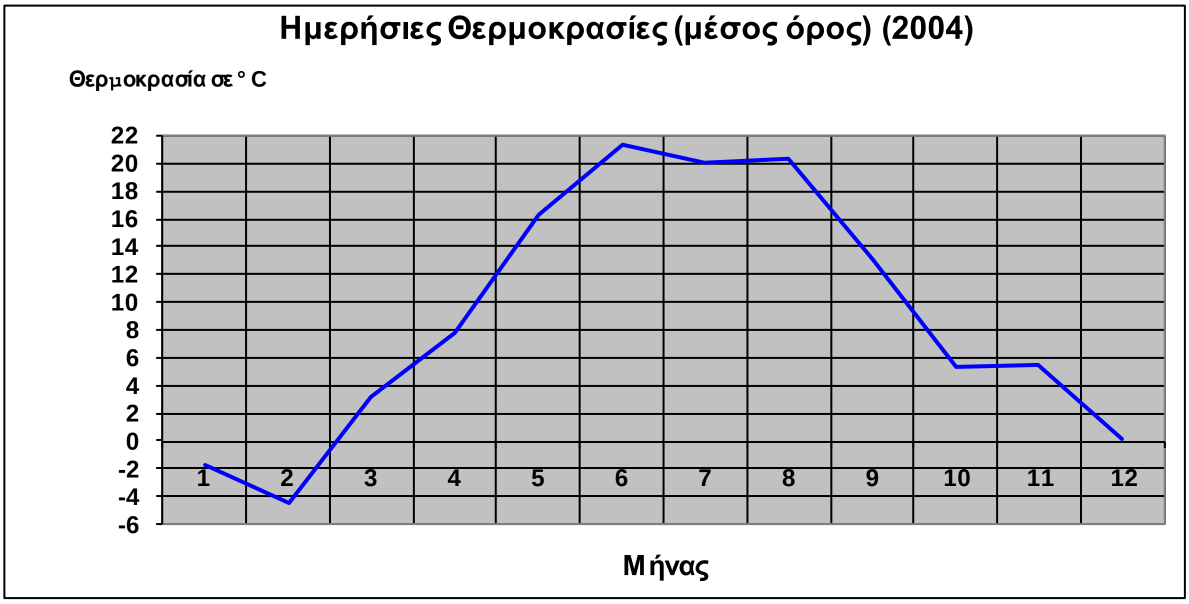
Την πρώτη εβδομάδα του Μαΐου μετρήθηκαν στη Θεσσαλονίκη (κάθε μέρα στις 3.00 τη νύχτα και στις 3.00 το μεσημέρι), οι παρακάτω θερμοκρασίες:

- στις 1/5 τη νύχτα 15° και το μεσημέρι 23°
- στις 2/5 τη νύχτα 13° και το μεσημέρι 23
- στις 3/5 τη νύχτα 13 και το μεσημέρι 27°
- στις 4/5 τη νύχτα 16° και το μεσημέρι 25°
- στις 5/5 τη νύχτα 17° και το μεσημέρι 28°
- στις 6/5 τη νύχτα 19° και το μεσημέρι 25°
- στις 7/5 τη νύχτα 15° και το μεσημέρι 21°.

Κάνε μια γραφική παράσταση για να παρουσιάσεις τις θερμοκρασίες.

Δραστηριότητα 8η

Το γράφημα που ακολουθεί παριστάνει τη μέση θερμοκρασία κάθε μήνα, στην Τσεχία, για το έτος 2004.



- Ποιος μήνας έχει τη μεγαλύτερη και ποιος τη μικρότερη μέση θερμοκρασία;

Μεγαλύτερη: …………………………………..

Μικρότερη: …………………………………….

- Πώς θα περιγράψεις τις μεταβολές θερμοκρασίας στην Τσεχία, σύμφωνα με το γράφημα αυτό;

Δραστηριότητα 9η

Η απόσταση ανάμεσα σε δύο πόλεις είναι 400 χιλιόμετρα. Πόσες ώρες θα χρειαστεί για να τη διανύσει ένα ποδήλατο με ταχύτητα 25 Km/ώρα, ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 100 Km/ώρα, ένα άλλο ταχύτερο με 200 Km/ώρα και ένα αεροπλάνο με 800 Km/ώρα; Κατασκεύασε ένα πίνακα τιμών για τα ποσά χρόνος (ανά ώρα) και ταχύτητα.
Τοποθέτησε τα ζεύγη τιμών που βρήκες σε μια γραφική παράσταση. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της γραφικής παράστασης.

Δραστηριότητα 10η

Στη λαϊκή αγορά ο παραγωγός πουλάει ντομάτες προς 1,20 € το κιλό. Τοποθετεί πάνω στη ηλεκτρονική ζυγαριά την ποσότητα και γράφει την τιμή του κιλού. Η ζυγαριά αυτόματα εμφανίζει το βάρος και την τιμή που πρέπει να πληρώσει ο καταναλωτής. Συμπλήρωσε τον πίνακα που δείχνει τα ποσά που πληρώνουν οι καταναλωτές για τις διάφορες ποσότητες.

- Η ποσότητα και η τιμή είναι ποσά ανάλογα;

Ποσότητα σε κιλά	1	2	3	4	5	6
Τιμή σε €	1,20					

- Οι αριθμοί της δεύτερης σειράς προκύπτουν από τους αριθμούς της πρώτης σειράς πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με τον ίδιο αριθμό, που λέγεται συντελεστής αναλογίας. Υπολόγισε τον.
- Να παραστήσεις γραφικά τα σημεία του πίνακα τιμών σε ένα σύστημα αξόνων. Στη συνέχεια, ενώνοντας τα σημεία σχεδίασε τη γραφική παράσταση που δείχνει τη σχέση ανάμεσα στην ποσότητα και την τιμή. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της γραφικής παράστασης;
- Χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση (χωρίς τον πίνακα τιμών και χωρίς πράξεις) υπολόγισε την τιμή των 9 κιλών.

Δραστηριότητα 11η

Η Μαρία πληρώνει για το κινητό της πάγιο 11 € και 0,003 € ανά δευτερόλεπτο συνομιλίας. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος ομιλίας σε δευτερόλεπτα	100	200	400	500	…	1000	10000
Λογαριασμός σε €							

Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής από τους αριθμούς της πρώτης; Τα ποσά είναι ανάλογα;
- Να κάνεις μια γραφική παράσταση που να δείχνει τη σχέση αυτή.

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της γραφικής παράστασης; Σε τι διαφέρει αυτή η γραφική παράσταση από τη γραφική παράσταση της προηγούμενης δραστηριότητας;

Δραστηριότητα 12η

Μία ομάδα εργατών αποτελούμενη από 4 άτομα συσκευάζει σε κουτιά μια παραγγελία παπουτσιών σε 3 ώρες. Σε πόσες ώρες θα τελείωνε την ίδια δουλειά μια ομάδα 2 ατόμων; Σε πόσες ώρες τελειώνει την ίδια δουλειά μια ομάδα 6 ατόμων που θα εργαζόταν με τον ίδιο ρυθμό; Συμπλήρωσε τον πίνακα. Βρες και άλλα 3 ζεύγη τιμών που ικανοποιούν την ίδια σχέση και τοποθέτησε τα στον πίνακα.

Άτομα	4	2	6			
Ώρες	3					

Τοποθέτησε τα ζεύγη των αριθμών του πίνακα σε σύστημα ημιαξόνων και σχεδίασε τη γραφική παράσταση.

Δραστηριότητα 13η

Μια παρέα παιδιών πλήρωσε για τις 3 πορτοκαλάδες που ήπιε 6,6 €. Πόσο χρήματα πλήρωσαν για κάθε πορτοκαλάδα.

- Πόσα χρήματα θα είχαν πληρώσει αν είχαν πιει 6 πορτοκαλάδες;
- Πόσα χρήματα θα είχαν πληρώσει για κάθε πορτοκαλάδα αν είχαν πληρώσει 6,6 € για 6 πορτοκαλάδες;

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Σε έναν πίνακα αναλογίας μπορούμε να πάρουμε τους αριθμούς της πρώτης σειράς πολλαπλασιάζοντας τους αριθμούς της δεύτερης σειράς επί τον αντίστροφο του συντελεστή αναλογίας. Σωστό ☐ Λάθος ☐

1. Ο συντελεστής αναλογίας του πίνακα είναι 0,7 Σωστό ☐ Λάθος ☐

x	5	6	8	10
ψ	3,5	4,2	5,6	

2. Ο πίνακας τιμών είναι πίνακας αναλογίας. Σωστό ☐ Λάθος ☐

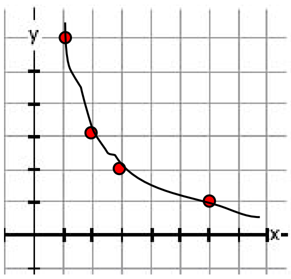
x	2	5	9
ψ	3	7,5	14

3. Ποια σχέση συνδέει τα x και ψ στον παρακάτω πίνακα;

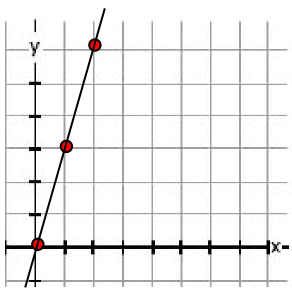
x	1	2	3	4	6
ψ	12	6	4	3	2

4. Αντιστοίχισε μία συνάρτηση με την αντίστοιχη γραφική παράσταση:

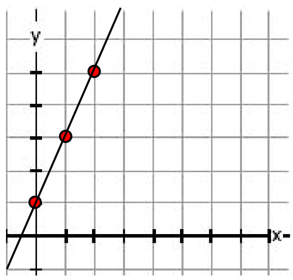
ψ = 3.χ



ψ = 2.χ + 1



ψ = 12/χ



Τριγωνομετρικές έννοιες

Ημίτονο- συνημίτονο - εφαπτομένη		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να γνωρίζουν πώς ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο και η εφαπτομένη οξείας γωνίας. Να υπολογίζουν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του. Να υπολογίζουν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης. Να γνωρίζουν ότι δύο γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένες είναι ίσες και να μπορούν να σχεδιάζουν μια γωνία της οποίας δίνεται το ημίτονο ή το συνημίτονο ή η εφαπτομένη. Να γνωρίζουν πώς μεταβάλλεται το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη οξείας γωνίας όταν μεταβάλλεται η γωνία. Να υπολογίζουν με τη βοήθεια του ημιτόνου, του συνημιτόνου και της εφαπτομένης διάφορες αποστάσεις. Να γνωρίζουν και να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 300, 450, 600	Να προσεγγίσουν την έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών μέσα από πραγματικές καταστάσεις που τους δίνουν νόημα

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Οι τριγωνομετρικές έννοιες παρουσιάζουν κάποιες ιδιαιτερότητες γιατί συνδυάζουν τις γωνίες με τους λόγους των πλευρών σε ένα τρίγωνο. Η επιδίωξη σε αυτή την ενότητα είναι να προσεγγίσουν οι μαθητές αυτή τη σύνδεση και τους λόγους που τις περιγράφουν χωρίς να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στους τριγωνομετρικούς συμβολισμούς

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν το λόγο δύο πλευρών ενός τριγώνου ως ένα αριθμό κι ακόμα περισσότερο να συνδέσουν το λόγο με το μέτρο της γωνίας. Οι τυπικές παρουσιάσεις των τριγωνομετρικών αριθμών δεν τους επιτρέπουν να αντιληφθούν αυτή τη σύνδεση.

Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να οδηγηθούν σε συγκρίσεις ορθογωνίων τριγώνων που μέσα από τη σύγκριση του σχήματος και κατά συνέπεια των γωνιών να προσεγγίσουν τους λόγους των πλευρών.

Διδακτικές υποδείξεις

Αρχικά προτείνονται δραστηριότητες με τις συγκρίσεις που αναφέρθηκαν. Στη συνέχεια μέσα από καθημερινές καταστάσεις αναδεικνύεται η σύνδεση του μέτρου των γωνιών με τους λόγους των πλευρών. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνδέονται με την ανάγκη να περιγραφούν αυτοί οι λόγοι.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

Σου δίνεται μια συλλογή από 12 ορθογώνια τρίγωνα (*τα τρίγωνα αυτά είναι κατασκευασμένα έτσι ώστε 4 ορθογώνια να είναι κατασκευασμένα με λόγο πλευρών 1 προς 4, 4 με λόγο 1 προς 3 και τα υπόλοιπα με λόγο 1 προς 2*). Ομαδοποιήστε τα και εξήγησε τα κριτήρια αυτής της ομαδοποίησης.

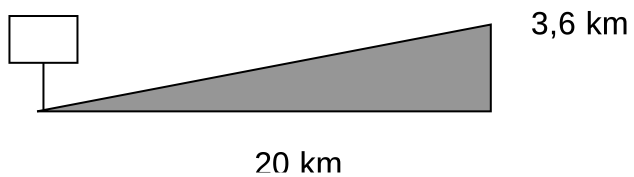
Τοποθέτηση τα τρίγωνα κάθε ομάδας το ένα πάνω στο άλλο και συμπλήρωσε τον πίνακα:

Ομάδα1	Μικρή πλευρά	Μεγάλη πλευρά	Μικρή / μεγάλη πλευρά
Ορθογώνιο 1ο			
Ορθογώνιο 2ο			
….			
Ομάδα 2			
Ορθογώνιο 1ο			
Ορθογώνιο 2ο			
….			

Τι κοινό έχουν τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα; Τι το περιγράφει;

Δραστηριότητα 2η

Τοποθετούμε τα τρίγωνα της ίδιας ομάδας πάνω σε ένα σύστημα αξόνων. Τι παρατηρούμε για τα τρίγωνα αυτά;



Δραστηριότητα 4η

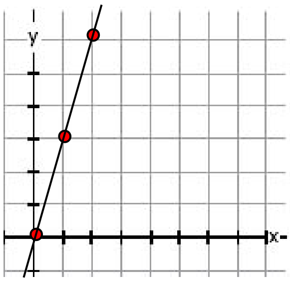
Το Villach είναι μια μικρή πόλη της Αυστρίας, κοντά στα σύνορα με τη Σλοβενία. Ο δρόμος που φτάνει από τη Σλοβενία στο Villach είναι ένας από τους πιο ανηφορικούς δρόμους στην Ευρώπη. Αρκετά χιλιόμετρα νωρίτερα υπάρχουν προειδοποιητικές πινακίδες σχετικές με την κλίση του δρόμου, ώστε να τον αποφύγουν αυτοκίνητα με κινητήρες μικρής ισχύος. Ο δρόμος καλύπτει μια οριζόντια απόσταση 20 Km και ανεβαίνει ύψος 3,6 Km.

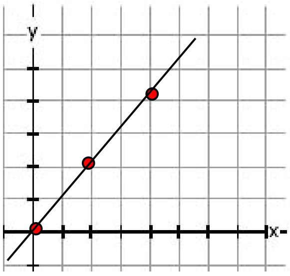
Οι προειδοποιητικές πινακίδες αναφέρουν την κλίση του δρόμου εκφρασμένη ως ποσοστό. Υπολόγισε την κλίση του δρόμου και συμπλήρωσε την πινακίδα.

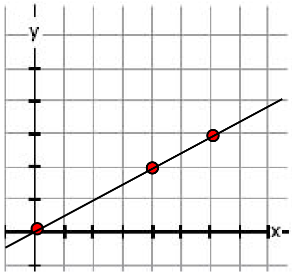
- Οι πινακίδες της τροχαίας για την κλίση των δρόμων γράφουν πχ. 10% ή 8%. Εξήγησε τι σημαίνει αυτός ο αριθμός και τι περιγράφει.

Δραστηριότητα 5η

Την ίδια έννοια χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κλίση μιας ευθείας στην γραφική της παράσταση. Βρες την κλίση των παρακάτω ευθειών από τις γραφικές τους παραστάσεις. Τι δείχνει αυτός ο αριθμός, με ποιο στοιχείο της ευθείας συνδέεται;





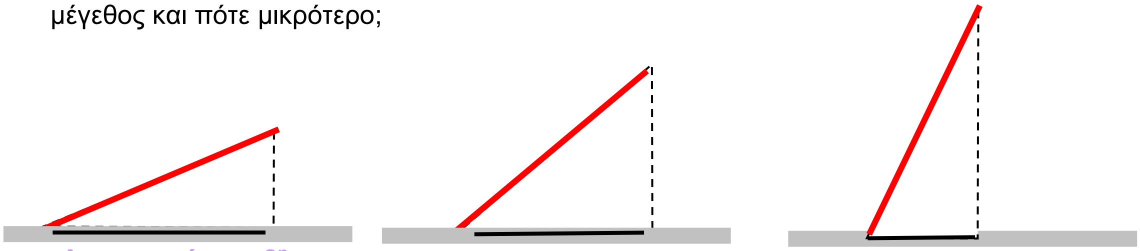


Δραστηριότητα 6η

Ένα ζωγράφος δοκιμάζει να ζωγραφίσει τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας. Το ύψος του πύργου είναι 30 m και το ύψος που έχει τώρα λόγο της απόκλισης από την κατακόρυφη είναι 28 m. Στο σχέδιό του το ύψος του πύργου θέλει να είναι 15 cm, πόσο να είναι το κατακόρυφο ύψος; Ο ζωγράφος είναι σίγουρος πώς με αυτές στις διαστάσεις ο πίνακας που θα ζωγραφίσει θα «γέρνει» το ίδιο όπως και ο πύργος της Πίζας. Πώς καταλήγει σε αυτό το συμπέρασμα;

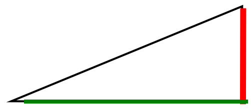
Δραστηριότητα 7η

Πάρε μία ράβδο, φώτισε την από πάνω και δοκίμασε να ρίξεις τη σκιά της στο πάτωμα. Στις διαφορετικές θέσεις η σκιά αυτή (προβολή) έχει διαφορετικό μήκος. Το ίδιο συμβαίνει και με τη σκιά που ρίχνει ο ήλιος. Γιατί συμβαίνει αυτό; Πότε η σκιά έχει μεγαλύτερο μέγεθος και πότε μικρότερο;

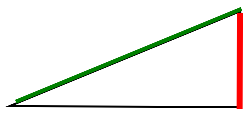


Δραστηριότητα $8^{η}$

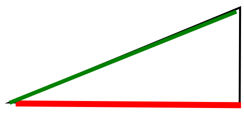
- Δίνονται 3 ορθογώνια τρίγωνα που η κατακόρυφη προς την οριζόντια κάθετη πλευρά έχουν λόγο 0,6, 1 και 1,7. Ποιο τρίγωνο έχει μεγαλύτερη γωνία βάσης; Πόση θα είναι η γωνία του τριγώνου με λόγο 1;



- Δίνονται 3 ορθογώνια τρίγωνα που η υποτείνουσα προς την κάθετη πλευρά έχουν λόγο 0,5, 0,7 και 0,85. Ποιο τρίγωνο έχει μεγαλύτερη γωνία βάσης; Πόση θα είναι η γωνία του τριγώνου με λόγο 0,5;



- Δίνονται 3 ορθογώνια τρίγωνα που η υποτείνουσα προς την οριζόντια πλευρά έχουν λόγο 0,5, 0,7 και 0,85. Ποιο τρίγωνο έχει μεγαλύτερη γωνία βάσης; Πόση θα είναι η γωνία του τριγώνου με λόγο 0,5;



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Στην ενότητα αυτή συνάντησες τρεις λόγους στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- ποιος λόγος συνδέεται με την κλίση της υποτείνουσας;
- ποιος λόγος συνδέεται με το ύψος του τριγώνου;
- ποιος λόγος συνδέεται με την προβολή της υποτείνουσας;

2. Οι τρεις αυτοί λόγοι συνδέονται με ένα στοιχείο του τριγώνου; Ποιο είναι αυτό;

- **Κανονικά Πολύγωνα**

Σχεδιασμός Πολυγώνων και υπολογισμός γωνιών		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να γνωρίζουν την πολυγωνική γραμμή και τα πολυγωνικά σχήματα. Να γνωρίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο, το εξάγωνο	Να γνωρίζουν τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου. Να γνωρίζουν ότι ένα κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο. Να υπολογίζουν την γωνία και την κεντρική γωνία κανονικών πολυγώνων.	Σχεδιάζουν σε κύκλο κανονικά σχήματα, χωρίζοντας τον σε 3, 4, 5, 6, κλπ. μέρη. Υπολογίζουν τη γωνία, και τη κεντρική γωνία κανονικών σχημάτων.

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Τα κανονικά πολύγωνα είναι σχήματα απλά, αλλά πλούσια σε ιδιότητες. Η εγγραφή τους σε κύκλο, που επιτρέπει και την κατασκευή τους, οδηγεί στην ομαδοποίησή τους αλλά και την προσέγγιση πολλών ιδιοτήτων τους. Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται ο σχεδιασμός τους και η κατανόηση κάποιων ιδιοτήτων και σχέσεων μέσα από αυτό το σχεδιασμό.

Διδακτικές υποδείξεις

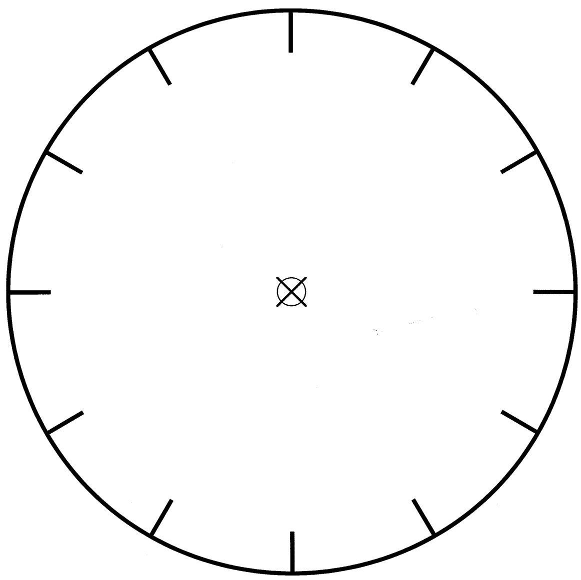
Ως βάση για την προσέγγιση των κανονικών πολυγώνων χρησιμοποιείται το «ρολόι», οικείο αντικείμενο για τους μαθητές και με πολλές υποδιαιρέσεις.
Η κατασκευή πολυγώνων σε ένα ρολόι, επιτρέπει την ομαδοποίηση των σχημάτων, τη σύνδεση με τον κύκλο και την κατανόηση της επίκεντρης γωνίας. Προτείνονται αρχικά τα πιο απλά σχήματα (τρίγωνα κλπ) και μέσα από αυτά προκύπτουν και τα πιο σύνθετα (πεντάγωνα κλπ.).
Οι προτάσεις για διαφορετική τοποθέτηση των σχημάτων μέσα στον κύκλο επιτρέπει την ανάπτυξη μη στερεοτυπικών θέσεων και μιας ευλυγισίας στην αντίληψη των κανονικών πολυγώνων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

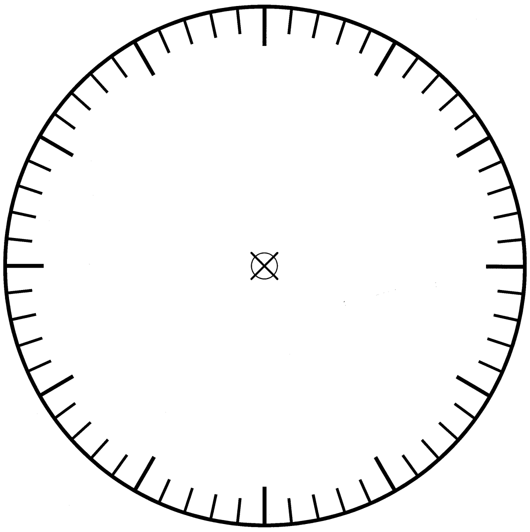
Δραστηριότητα 1η

Μέσα στον κύκλο του ρολογιού (σχήμα Α' ή σχήμα Β') σχεδίασε ένα τετράγωνο. Εξήγησε πως το κατασκεύασες.
Πόσες μοίρες είναι η γωνία του τετράγωνου που κατασκεύασες. Πόσες μοίρες είναι η επίκεντρη γωνία (κεντρική γωνία) του τετραγώνου. Ποια είναι η μεταξύ τους σχέση; Στο ίδιο σχήμα κατασκεύασε ένα οχτάγωνο.

<u>Α΄ σχήμα</u>



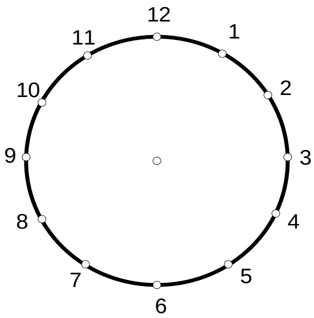
Β΄ σχήμα



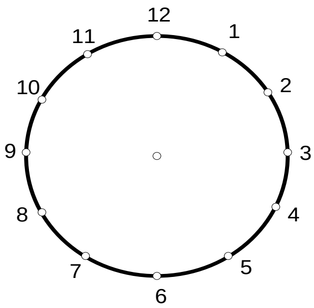
Γράψε έναν κανόνα;

Δραστηριότητα 2η

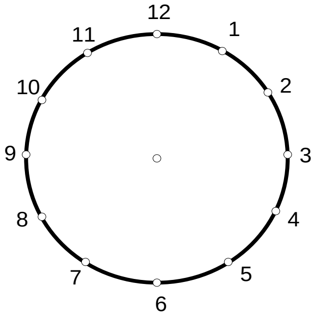
Στο παρακάτω σχήμα σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ώστε οι κορυφές του τριγώνου να πέφτουν επάνω στα σημάδια των ωρών. Υπάρχουν άλλες πιθανές θέσεις;



Με τον ίδιο τρόπο σχεδίασε ένα τετράγωνο, βρες κι άλλες δυνατές θέσεις.



Σχεδίασε ένα πεντάγωνο (με ίσες πλευρές) κι ένα εννεάγωνο κι εξήγησε έναν τρόπο.



Δραστηριότητα 3η

Η παρακάτω εικόνα δείχνει την κυψέλη μελισσών. Ποιο είναι το επαναλαμβανόμενο σχήμα που δημιουργείται; Πώς ονομάζεται;

Δραστηριότητα 4η

Στο σχήμα του ρολογιού κατασκεύασε ένα τρίγωνο και ένα εξάγωνο. Εξήγησε πως κατασκεύασες κάθε πολύγωνο.

Πόσες μοίρες είναι η γωνία του τριγώνου; Πόσες μοίρες είναι η επίκεντρη γωνία (κεντρική γωνία) του τριγώνου; Πόσες μοίρες είναι η γωνία του εξαγώνου και πόσες η επίκεντρη; Ποια είναι η μεταξύ τους σχέση;

Η σχέση αυτή ισχύει και σε άλλα πολύγωνα;

Δραστηριότητα 5η

Υπολόγισε την επίκεντρη γωνία (κεντρική γωνία) των παρακάτω κανονικών πολυγώνων:

Πολύγωνο		**Αριθμός γωνιών**	**Επίκεντρη γωνία**
τρίγωνο	**360^0**		
τετράγωνο			
πεντάγωνο			
εξάγωνο			
επτάγωνο			
οκτάγωνο			
εννεάγωνο			
δεκάγωνο			
εντεκάγωνο			
δωδεκάγωνο			

Με βάση τη σχέση που βρήκες στην προηγούμενη δραστηριότητα, βρες πόσες μοίρες είναι η γωνία κάθε σχήματος.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Ποιος είναι ο κανόνας με τον οποίο υπολογίζουμε την επίκεντρη γωνία ενός κανονικού πολυγώνου;

2. Πόσες μοίρες είναι η επίκεντρη γωνία ενός κανονικού εικοσαγώνου, ενός κανονικού τριανταεξαγώνου κ.α.
3. Αν η επίκεντρη γωνία ενός σχήματος είναι 24^o, ποιο σχήμα είναι; Πόσες μοίρες είναι η γωνία του σχήματος αυτού;

- Μετρήσεις εμβαδών και όγκων

Μονάδες μέτρησης		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να μπορούν να συνδέσουν τους δεκαδικούς με το δεκαδικό μετρικό σύστημα.	Να γνωρίσουν τις βασικές μονάδες μέτρησης μεγεθών και τη μετατροπή τους από τη μια στην άλλη	Γνωρίζουν τις βασικές μονάδες μέτρησης μεγεθών. Μετατρέπουν τις μονάδες μήκους, επιφάνειας και όγκου. Γνωρίζουν το διεθνή συμβολισμό τους

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Βασική προϋπόθεση για τη μέτρηση οποιοδήποτε μεγέθους είναι η κατανόηση του αντίστοιχου χαρακτηριστικού- μεγέθους που μετρούμε και η χρήση της κατάλληλης μονάδας μέτρησης.

Τα όργανα μέτρησης είναι μέσα που χρησιμοποιούμε ως ενδιάμεσους όταν οι άμεσες συγκρίσεις δεν είναι εφικτές. Η μέτρηση (αριθμητική σχέση) είναι η αντιστοίχηση του μεγέθους με έναν αριθμό που προκύπτει από τη σύγκριση του ενδιάμεσου με το μέγεθος αυτού που μετράμε.
Έτσι «μετρώ» μπορεί να σημαίνει «γεμίζω», «καλύπτω», «αντιστοιχώ» το χαρακτηριστικό που μετρώ με μια μονάδα μέτρησης. Οι διαδικασίες αυτές βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τι σημασία της μέτρησης.

Παράλληλα με τις μετρήσεις σημαντικό και απαραίτητο στοιχείο είναι οι συγκρίσεις και οι εκτιμήσεις. Οι εκτιμήσεις βοηθούν τους μαθητές να εστιάσουν την προσοχή τους στο χαρακτηριστικό που μετρούν και να εξοικειωθούν με τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης.

Δυσκολίες των μαθητών

Η μέτρηση είναι μία διαδικασία που ξεκινάει από τις μικρότερες ηλικίες και είναι πολύ συνηθισμένη στην καθημερινή ζωή. Συχνά οι τυπικές και αποκομμένες από την πραγματικότητα προσεγγίσεις στη διαδικασία μέτρησης δεν επιτρέπουν στους μαθητές να μεταφέρουν την εμπειρία τους στις εφαρμογές που πραγματοποιούν. Για το λόγο αυτό οι προτεινόμενες στην ενότητα αυτή δραστηριότητες πρέπει να είναι οικείες στους μαθητές.

Έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες στην κατανόηση της διάστασης κάθε μονάδας κι αντιμετωπίζουν τη μέτρηση ως διαδικασία και όχι ως σχέση ανάμεσα στο μέγεθος και τη μονάδα μέτρησης όπως και των μεγεθών μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό ενθαρρύνονται να χρησιμοποιήσουν αρχικά άτυπες και στη συνέχεια τυπικές μονάδες όπως και να δημιουργήσουν μόνοι τους υποδιαιρέσεις των βασικών μονάδων μέτρησης, όταν αυτό αναδεικνύεται απαραίτητο στη μέτρηση. Η δημιουργία αυτή επιτρέπει συγκρίσεις και μετατροπές που βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που προκαλούν οι μηχανικές προσεγγίσεις.

Διδακτικές υποδείξεις
Μια μέτρηση μπορεί να αναλυθεί στα παρακάτω βήματα:

1. Κατανόηση του προς μέτρηση μεγέθους.
2. Επιλογή μονάδας κατάλληλης για το συγκεκριμένο μέγεθος.
3. Σύγκριση της επιλεγμένης μονάδας με αντιστοίχηση, γέμισμα ή με κάποιο άλλο τρόπο, πάντα σε σχέση με το χαρακτηριστικό του αντικειμένου που μετράμε.

Τα όργανα μέτρησης είναι εργαλεία που διευκολύνουν τη σύγκριση, το γέμισμα, την επικάλυψη ή την αντιστοίχηση.

Είναι σημαντικό οι μετρήσεις να ξεκινούν με άμεσες συγκρίσεις των μεγεθών, ώστε η δραστηριότητα να εστιασθεί στο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό. Για το μήκος και πολλές περιπτώσεις επιφανειών η σύγκριση αυτή είναι εφικτή, όπως όταν τοποθετούμε το ένα αντικείμενο παράλληλα ή πάνω στο άλλο. Στην περίπτωση που η άμεση σύγκριση δεν είναι εφικτή, όπως σε διαφορετικές καταστάσεις σύγκρισης επιφανειών και τη σύγκριση του όγκου, απαιτείται μια έμμεση μέθοδος, όπως οι επικαλύψεις ή το γέμισμα με τις αντίστοιχες μονάδες. Έμμεσος τρόπος είναι και η χρήση σπάγκου για την μέτρηση του ύψους και της περιμέτρου σχημάτων που δεν μπορούν να συγκριθούν με άμεσο τρόπο. Ειδικά για τον όγκο η σύγκριση αυτή μπορεί να βοηθηθεί από την έννοια της χωρητικότητας και τη χρήση υλικών όπως άμμος ή σπόροι.

Το πέρασμα από τις αυθαίρετες στις τυπικές μονάδες μπορεί να βοηθηθεί από τις συγκρίσεις με διαφορετικού είδους μονάδες που δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Έτσι για παράδειγμα, η μέτρηση της ίδιας επιφάνειας με διαφορετικού μεγέθους μονάδα, όπως πχ. τραπουλόχαρτα, βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι το είδος της μονάδας που χρησιμοποιούν είναι εξίσου σημαντικό με το χαρακτηριστικό που μετρούν. Με αυτόν τον τρόπο κατανοούν ότι οι μικρότερες μονάδες δίνουν αριθμητικά μεγαλύτερες μετρήσεις και αντίστροφα.

Στην ενότητα αυτή προτείνονται επίσης δραστηριότητες με άτυπα όργανα μέτρησης σε σύγκριση με πραγματικά μοντέλα μονάδων για να γίνει κατανοητή η λειτουργία των τυπικών μονάδων Στις δραστηριότητες αυτές όπου οι μαθητές κατασκευάζουν μόνοι τους απλά όργανα μέτρησης, όπως για παράδειγμα ένα χάρακα με υποδιαιρέσεις, τους βοηθάει να διαπιστώσουν τον αριθμό των υποδιαιρέσεων και των διαστημάτων που χρησιμοποιούν. Η σύγκριση της μέτρησης που κάνουν με τα άτυπα όργανα σε σύγκριση με τα πραγματικά μοντέλα τους βοηθάει να κατανοήσουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των δύο μέσων.

Συνοπτικά, στις προτεινόμενες δραστηριότητες ακολουθείται μια πορεία από την άμεση σύγκριση μεγεθών στις έμμεσες συγκρίσεις και από την άτυπη χρήση των μονάδων στη χρήση των τυπικών μονάδων. Στο τέλος πραγματοποιείται υποδιαίρεση και σύγκριση των μονάδων και οργάνων μέτρησης με κατασκευές από τους ίδιους τους μαθητές.

Συνιστάται η συστηματική ενασχόληση με τον πίνακα μετατροπής μονάδων, που δημιουργείται επίσης από τους ίδιους τους μαθητές και τους βοηθάει να αναπτύξουν μια συνολική αντίληψη για τους κανόνες μετατροπής των βασικών μονάδων μήκους, επιφάνειας και όγκου.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Μέτρηση μήκους – μονάδες

Προτείνονται **Δραστηριότητες** με μετρήσεις της τάξης, του πίνακα, της αυλής ή του θρανίου και των βιβλίων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις εμπειρίες μέτρησης που έχουν, χρησιμοποιώντας μετροταινίες ή χάρακες που έχουν κατασκευάσει.

Δραστηριότητα 1η

Υπολόγισε το μήκος που έχουν 10 παλάμες στη σειρά και το μήκος που έχουν 10 μικρά δάχτυλα στη σειρά.
Με τα αποτελέσματα αυτά βρες και κατασκεύασε ένα πίνακα που δείχνει πόσες παλάμες περιλαμβάνονται σε ένα μέτρο και πόσα δάκτυλα σε μία παλάμη και ένα μέτρο.

Δραστηριότητα 2η

Συμπλήρωσε το πίνακα:

Μέτρο (m)	**Δεκατόμετρο (παλάμη) (dm)**	**Εκατοστόμετρο (δάχτυλο) (cm)**	**Χιλιοστόμετρο (mm)**
1	10		
5			
	70		
		800	
			6.000

Δραστηριότητα 3η

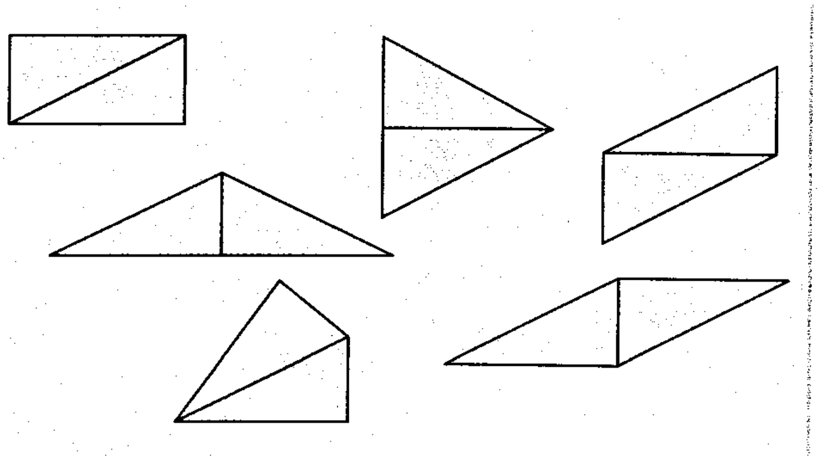
Κατασκεύασε τετράγωνα με πλευρά ένα μέτρο, μία παλάμη, ένα εκατοστό και βρες πόσα τετράγωνα παλάμης (τετραγωνική παλάμη) και πόσα τετράγωνα εκατοστού (τετραγωνικά εκατοστά) χωράνε σε ένα τετράγωνο μέτρου. Όμοια πόσα τετραγωνικά εκατοστά χωράνε σε μία τετραγωνική παλάμη. Κατασκεύασε ένα πίνακα που δείχνει αυτά τα αποτελέσματα. Στη συνέχεια συμπλήρωσε το πίνακα:

Τετραγωνικό Μέτρο (m^2)	**Τετραγωνικό Δεκατόμετρο (dm^2)**	**Τετραγωνικό Εκατοστόμετρο (cm^2)**	**Τετραγωνικό Χιλιοστόμετρο (mm^2)**
1	100		
6			
	500		
		70.000	
			8.000.000

2. *Μέτρηση εμβαδών – μονάδες*

Δραστηριότητα 4η

Δίπλωσε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και κόψε το διαγώνια, φτιάχνοντας δύο ίσα τρίγωνα. Αναδιάταξε τα τρίγωνα, ενώνοντας μόνο τις ίσες πλευρές και κατασκεύασε διαφορετικά σχήματα, προσπαθώντας να βρεις όλους τους πιθανούς τρόπους.



Ποιο σχήμα έχει το μεγαλύτερο ή μικρότερο εμβαδόν. Δικαιολόγησε την απάντησή σου. Ποιο συμπέρασμα βγάζεις;

Δραστηριότητα $5^{η}$

Μέτρησε την επιφάνεια της τάξης, του δωματίου σου, του θρανίου σου.

4. *Μέτρηση όγκου – μονάδες*

Δραστηριότητα $6^{η}$

Δίνονται δύο χαρτόκουτα, μπορείς να υπολογίσεις ποιο από τα δύο χωράει περισσότερα πράγματα. Δοκίμασε με τους ξύλινους κύβους (μονάδα).

Δραστηριότητα $7^{η}$

Κατασκεύασε ένα κύβο με πλευρά ένα μέτρο με χαρτόνι, ένα κύβο με πλευρά μια παλάμη. Πόσοι κύβοι με πλευρά μία παλάμη (κυβική παλάμη) χωράνε στον κύβο με πλευρά ένα μέτρο (κυβικό μέτρο).
Χωρίς να κατασκευάσεις, προσπάθησε να υπολογίσεις πόσοι κύβοι με πλευρά ένα εκατοστό (κυβικό εκατοστό) χωράνε στην κυβική παλάμη και πόσα κυβικά χιλιοστά χωράνε σε ένα κυβικό εκατοστό.

Δραστηριότητα $8^{η}$

Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα συμπλήρωσε τον πίνακα:

Κυβικό Μέτρο (m^2)	**Κυβικό Δεκατόμετρο (παλάμη) (dm^2)**	**Κυβικό Εκατοστόμετρο (δάχτυλο) (cm^2)**	**Κυβικό Χιλιοστόμετρο (mm^2)**
1	1000		
3			
	4000		
		5.000.000	
			6.000.000.000

Δραστηριότητα 8η

Συμπλήρωσε επίσης τον πίνακα:

Κυβικό Δεκατόμετρο (παλάμη) (dm^2)	Κυβικό Εκατοστόμετρο (δάχτυλο) (cm^2)	Κυβικό Χιλιοστόμετρο (mm^2)
1		
	2.000	
		9.000.000

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Αντιστοίχησε με την τιμή που ταιριάζει:

- Πόσα χιλιοστά έχει 1 παλάμη (δεκατόμετρο);
- Πόσα χιλιοστά έχει 1 μέτρο;
- Πόσες παλάμες έχει 1 μέτρο;
- Πόσα εκατοστά έχει 1 μέτρο;

- Πόσα τετραγωνικά χιλιοστά έχει 1 τετραγωνική παλάμη (δεκατόμετρο);
- Πόσα τετραγωνικά χιλιοστά έχει 1 μέτρο;
- Πόσες τετραγωνικές παλάμες έχει 1 τετραγωνικό μέτρο;
- Πόσα τετραγωνικά εκατοστά έχει 1 τετραγωνικό μέτρο;

- Πόσα κυβικά χιλιοστά έχει 1 κυβική παλάμη (δεκατόμετρο);
- Πόσα κυβικά χιλιοστά έχει 1 κυβικό μέτρο;
- Πόσες παλάμες έχει 1 κυβικό μέτρο;
- Πόσα κυβικά εκατοστά έχει 1 κυβικό μέτρο;

10
100
1.000
10.000
100.000
1.000.000
10.000.000
1.000.000.000

Εμβαδά επιπέδων σχημάτων		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλ/μου και του ορθογώνιου τριγώνου. Να συγκρίνουν εμβαδά. Να χρησιμοποιούν τους τύπους που επιτρέπουν τον υπολογισμό των εμβαδών του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου και του τραπεζίου. Να χρησιμοποιούν τους τύπους των εμβαδών του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου, του τραπεζίου και του κύκλου για να επιλύουν σχετικά προβλήματα.	Να υπολογίζουν το εμβαδόν των επίπεδων σχημάτων: ορθογωνίου, τριγώνου, παραλληλογράμμο, τραπεζίου. Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, όταν γνωρίζουν την ακτίνα του. Να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μμέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια	Υπολογίζουν το εμβαδό ορθογωνίου και εντοπίζουν τον τύπο. Υπολογίζουν το εμβαδόν τριγώνου και εντοπίζουν τον τύπο. Υπολογίζουν συγκριτικά το εμβαδόν παραλληλογράμμου και τραπεζίου. Υπολογίζουν το εμβαδό του κύκλου και συγκριτικά του κυκλικού τομέα σε μοίρες.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Οι μαθητές γνωρίζουν από τις μικρότερες τάξεις τα εμβαδά των απλών σχημάτων. Στην ενότητα αυτή πραγματοποιούν μία επανάληψη που το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ο σχηματισμός τύπων, μέσα από διαδικασίες γενίκευσης.

Ο υπολογισμός των τύπων προϋποθέτει την κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας ως μετρήσιμου χαρακτηριστικού των επιπέδων σχημάτων. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες στοχεύουν να ασκήσουν τους μαθητές στις μετρήσεις των επιφανειών και μέσα από συγκρίσεις των μετρήσεων αυτών στην εξαγωγή τύπων.

Στο σύνολο της ενότητας επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές ότι όλοι οι τύποι του εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι στενά συνδεδεμένοι μεταξύ τους που μπορούν να τους διατυπώνουν με γενικευμένο τρόπο και όχι ως συλλογή μεμονωμένων δεδομένων.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τους μετασχηματισμούς των σχημάτων που στηρίζουν τις προσεγγίσεις των τύπων του παρ/μου, του τριγώνου, του τραπεζίου, αλλά και του κύκλου. Για το λόγο αυτό ενθαρρύνονται να ασκηθούν σε αυτές οι δραστηριότητες σύγκρισης. Παράλληλα, έχουν δυσκολία να γενικεύουν μια μέτρηση και να βγάζουν ένα γενικό κανόνα, ο οποίος μάλιστα εκφράζεται με σύμβολα. Έτσι, προτείνονται δραστηριότητες που τους βοηθούν να κάνουν αυτές τις γενικεύσεις.

Διδακτικές υποδείξεις

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η ανάπτυξη των τύπων των εμβαδών, στηρίζονται σε δύο σημαντικά στοιχεία: τους μετασχηματισμούς των σχημάτων και τη γενίκευση των μετρήσεων. Οι δραστηριότητες των προηγούμενων ενοτήτων βοηθούν τους μαθητές να συγκρίνουν σχήματα που έχουν μετασχηματισθεί (δρ. 4η) και να υπολογίζουν (με επικαλύψεις) τις επιφάνειες των σχημάτων. Η χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού στηρίζει αυτούς τους υπολογισμούς.

Η γενίκευση των τύπων προκύπτουν από τη σύγκριση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων και την έκφρασή τους για γενικότερες τιμές (α, β, υ κλπ), όπως προτείνει η $1^{η}$ δραστηριότητα που ακολουθεί.

Οι αντίστροφοι υπολογισμοί είναι επίσης απαραίτητοι για να ελέγξουμε αν οι τύποι έγιναν κατανοητοί από τους μαθητές.

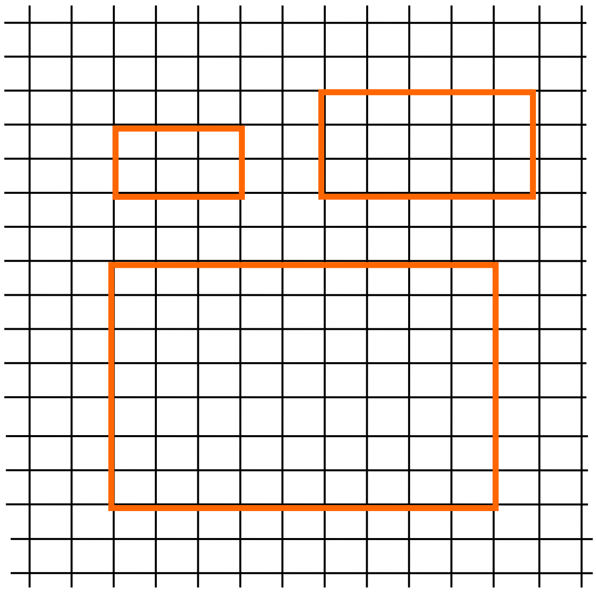
Βασική προϋπόθεση για να προχωρήσουν οι μαθητές στην κατανόηση του εμβαδόν του κύκλου είναι η έννοια του π=3,14. Μια από τις μεθόδους απόδειξης του τύπου βασίζεται στην ιδέα ότι το εμβαδόν ενός πολυγώνου πλησιάζει όλο και περισσότερο στο εμβαδόν του κύκλου όσο αυξάνεται ο αριθμός των κυκλικών τομέων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Εμβαδόν ορθογωνίου

Δραστηριότητα $1^{η}$

Βρες το εμβαδόν των παρακάτω ορθογωνίων και στη συνέχεια συμπλήρωσε τον πίνακα.



Βάση	**Ύψος**	**Εμβαδόν**
3 cm	2 cm	
5 cm	3 cm	
9 cm	7 cm	
12 cm	9 cm	
β	**υ**	

Το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση β και ύψος υ είναι: ……………………………………………….

Δραστηριότητα 2η

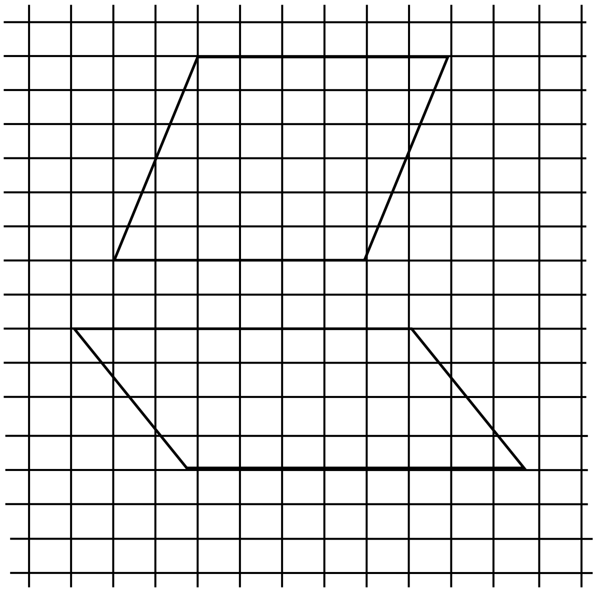
Με βάση τον κανόνα που βρήκες συμπλήρωσε και τον παρακάτω πίνακα:

Βάση	**Ύψος**	**Εμβαδόν**
9 cm		
	12 m	216 m^2
22 dm		396 dm^2

2. Εμβαδόν παραλληλογράμμου

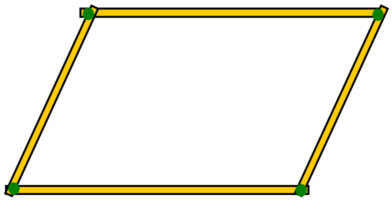
Δραστηριότητα 3η

Υπολόγισε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου του σχήματος που ακολουθεί:



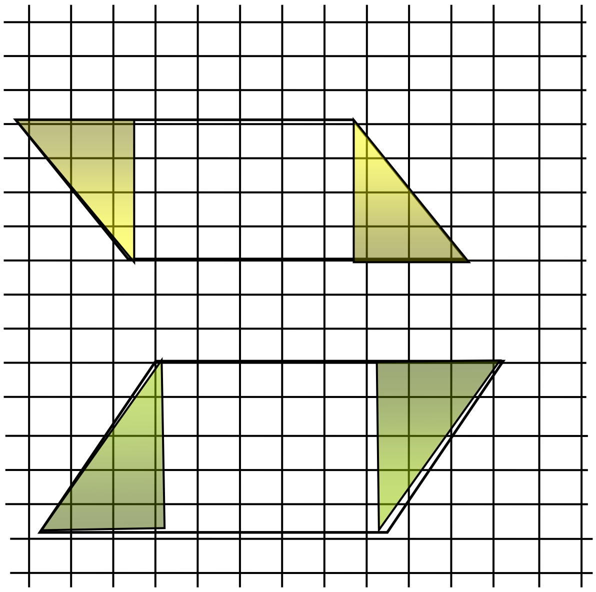
Δραστηριότητα 4η

Χρησιμοποίησε τα αρθρωτά σχήματα και το τετραγωνισμένο χαρτί για να συγκρίνεις τα σχήματα που δημιουργούνται όταν μετασχηματίσεις το σχήμα.



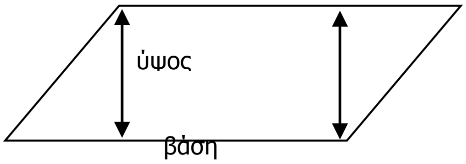
Δραστηριότητα 5η

Στα παρακάτω σχήματα σύγκρινε τα χρωματισμένα τρίγωνα. Χρησιμοποίησε αυτή τη σύγκριση για να μετασχηματίσεις το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο.



Δραστηριότητα 6η

Με βάση τους προηγούμενες μετασχηματισμούς, γράψε ένα τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραλληλογράμμου και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:



Βάση
3 cm
5 cm
9 cm
12 cm
Β

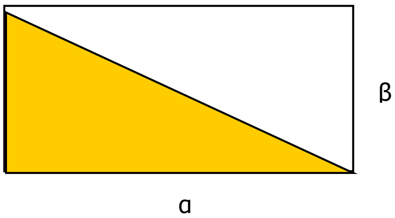
΄Υψος
2 cm
3 cm
7 cm
9 cm
Υ

Εμβαδόν

2. Εμβαδόν τριγώνου

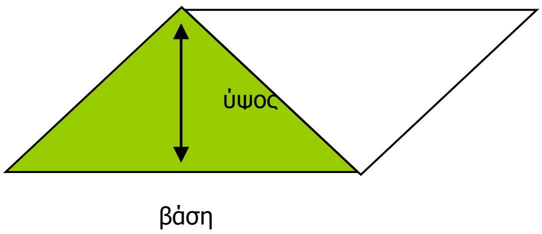
Δραστηριότητα 7η

Στο σχήμα που ακολουθεί, βρες το εμβαδόν το χρωματισμένου τριγώνου.



Δραστηριότητα 8η

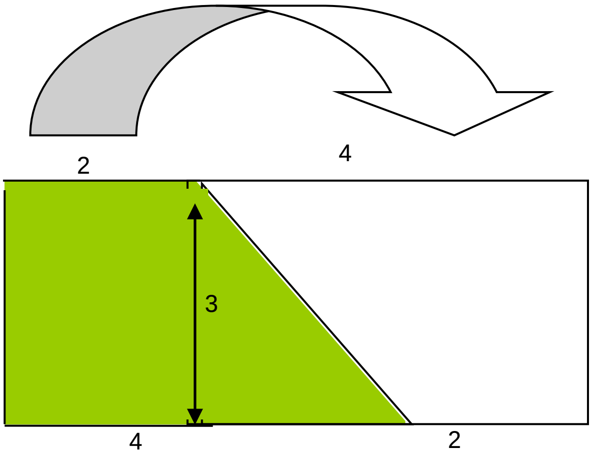
Κάνε το ίδιο και στο παρακάτω σχήμα. Η βάση β και το ύψος υ του παραλληλογράμμου και του τριγώνου είναι ίσα.



4. Εμβαδόν τραπεζίου

Δραστηριότητα 9η

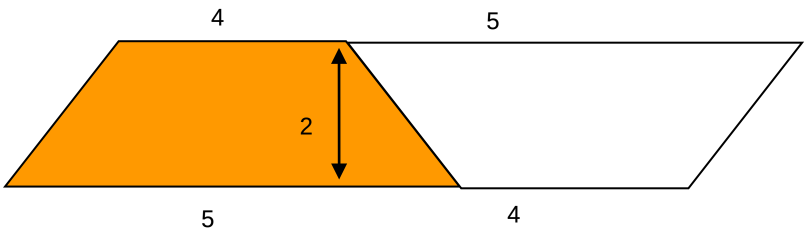
Στο σχήμα που ακολουθεί, βρες το εμβαδόν το χρωματισμένου τραπεζίου.



Παρατήρησε ότι βάζοντας δίπλα και αντίστροφα ένα ίδιο τραπέζιο δημιουργείται ένα ορθογώνιο.

Δραστηριότητα 10η

Κάνε το ίδιο και με το παρακάτω χρωματισμένο τραπέζιο.



Γράψε ένα τύπο για το εμβαδόν του τραπεζίου και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

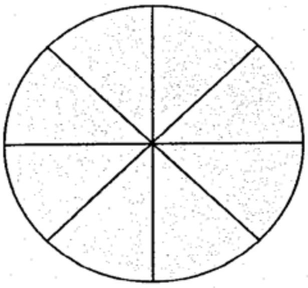
Βάση μεγάλη	Βάση μικρή	Ύψος	Εμβαδόν τραπεζίου
4 cm	2 cm	3 cm	cm^2
5 cm	4 cm	2 cm	
9 cm	4 cm	6 cm	
12 cm	12 cm	9 cm	
β1	**β2**	**υ**	

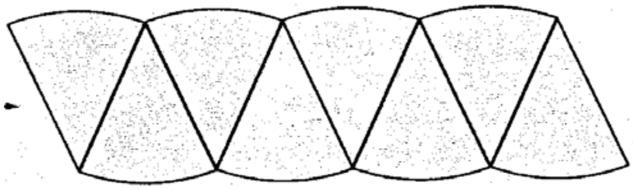
5. *Εμβαδόν κύκλου και κυκλικού τομέα*

Δραστηριότητα 11η

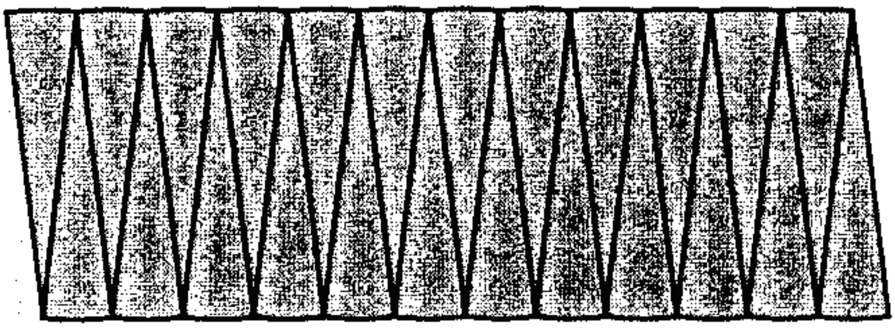
Με το διαβήτη σχεδίασε σε ένα χαρτόνι ένα κύκλο και μέτρησε την ακτίνα του. Υπολόγισε την περιφέρεια του κύκλου.

Στη συνέχεια χώρισε τον σε ίσα μέρη χαράζοντας διαγώνιους. Κόψε τα ίσα τμήματα και τοποθέτησε τα με τρόπο ώστε να δημιουργούν ένα σχήμα που μοιάζει με παραλληλόγραμμο. Σε όσο περισσότερα μέρη τον χωρίζεις τόσο περισσότερο πλησιάζει το σχήμα σε αυτό του παραλληλογράμμου. Δοκίμασε με 8 και με 16 μέρη.





Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα σχήμα με 24 κομμάτια.



Πόσο είναι η βάση αυτού του «παραλληλογράμμου»; Πόσο είναι το ύψος;
Πόσο είναι το εμβαδόν αυτού του σχήματος;
Πόσο είναι το εμβαδόν του κύκλου;
Μπορείς να βρεις πόσο είναι το εμβαδόν καθενός από τα ίσα σχήματα;

Δραστηριότητα 12η

Σύμφωνα με όσα βρήκες πιο πάνω συμπλήρωσε τον πίνακα:

Ακτίνα	**Διάμετρος**	**Περίμετρος**	**Εμβαδόν**
3 cm			
5 cm			
7 cm			
15 cm			

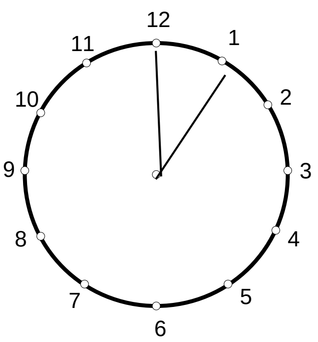
Και επίσης τον πίνακα:

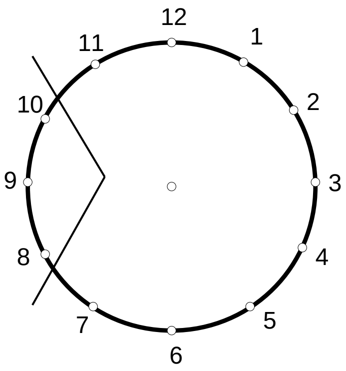
π	**ακτίνα**	**Περιφέρεια**	**Εμβαδόν κύκλου**
3,14	2 cm		
3,14		25,12 cm	
3,14			314 cm^2
π	**α**		

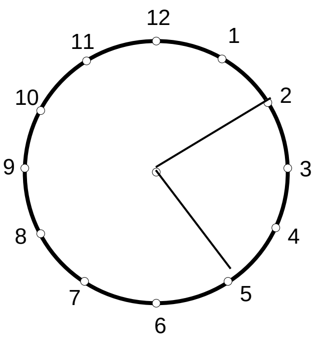
Τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Δραστηριότητα 13η

Υπολόγισε πάνω στο ρολόι τα εμβαδά των παρακάτω κυκλικών τομέων.







Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Προσπαθώντας να οργανώσει ένα πίνακα με τους τύπους, ένας συμμαθητής σου τους μπέρδεψε. Μπορείς να τον βοηθήσεις να τους βρει;

Αντιστοίχισε σε κάθε σχήμα τον σωστό τύπο.

ορθογώνιο	β.υ /2
παραλληλόγραμμο	3,14.δ
τρίγωνο	α.β
τραπέζιο	3,14.δ/ν
κύκλος	β.υ
κυκλικός τομέας	(β1+β2).υ/2

2. Ποιόν τύπο χρειάζεται να ξέρεις για να βρεις όλους τους άλλους τύπους;

Μέτρηση επιφανειών στερεών		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να γνωρίζουν να υπολογίζουν τα εμβαδά παράπλευρης και ολικής επιφάνειας του κύβου, του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και του κυλίνδρου και να λύνουν συνδυαστικά προβλήματα εμβαδών και όγκων. Να γνωρίζουν να αξιοποιούν δεδομένα από όγκους και εμβαδά για να κατασκευάζουν τα αναπτύγματα του κύβου, του κυλίνδρου και του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου	Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πρίσμα και το είδος του πρίσματος. Να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας ορθού πρίσματος. Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πυραμίδα και το είδος της πυραμίδας αυτής. Να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.	Αναγνωρίζουν τα στερεά: ορθό πρίσμα, πυραμίδα, κύλινδρο, κώνο και σφαίρα. Διακρίνουν την βάση και την παράπλευρη επιφάνεια. Υπολογίζουν τις επιφάνειες με πρακτικές μετρήσεις των βασικών σχημάτων, σε κάθε ένα από τα στερεά ορθό πρίσμα, πυραμίδα. Οργανώνουν τους υπολογισμούς σε τύπους. Λύνουν απλά προβλήματα επιφανειών.
	Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κύλινδρος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας ορθού κυλίνδρου. Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κώνος και να υπολογίζουν το εμβαδόν του. Να αναγνωρίζουν τη σφαίρα και να υπολογίζουν τον όγκο και την επιφάνεια της	Διακρίνουν την βάση και την παράπλευρη επιφάνεια. Υπολογίζουν τις επιφάνειες με πρακτικές μετρήσεις στα αναπτύγματα, σε κάθε ένα από τα στερεά, ορθό κύλινδρο και κώνο. Οργανώνουν τους υπολογισμούς σε τύπους. Λύνουν απλά προβλήματα επιφανειών.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Οι μετρήσεις των επιφανειών των στερεών μπορούν να γίνουν με πρακτικές μετρήσεις πάνω στα βασικά σχήματα. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητο να έχουν κατανοήσει οι μαθητές την έννοια «επιφάνεια» ως ιδιαίτερο στοιχείο του σχήματος. Η χρήση των αναπτυγμάτων πριν από την κατανόηση αυτής της έννοιας δεν είναι βοηθητική, γιατί οι μαθητές διαλύουν το σχήμα και με τον τρόπο αυτό χάνουν την ολιστική αντίληψη της επιφάνειας. Αντίθετα με τις επικαλύψεις μπορούν ευκολότερα οι μαθητές να αντιληφθούν τα επίπεδα που συνθέτουν την επιφάνεια ενός στερεού και στη συνέχεια να υπολογίσουν τα εμβαδά αυτών των επιφανειών με γνωστούς τύπους.

Ωστόσο η εύρεση τύπων για τον υπολογισμό των επιφανειών των στερεών, απαιτούν το πέρασμα των μαθητών από μία αθροιστική αντίληψη (αυτή η πλευρά + αυτή η πλευρά κλπ.) σε μία συνολική αντίληψη της μέτρησης αυτής.

Δυσκολίες των μαθητών

Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι δυσκολίες των μαθητών συγκεντρώνονται στην κατανόηση της επιφάνειας ως ιδιαίτερου στοιχείου των στερεών σχημάτων και στο πέρασμα από μία αθροιστική σε μία συνολική και τυποποιημένη αντίληψη του υπολογισμού των επιφανειών.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Η ανάπτυξη των τύπων της επιφάνειας των στερεών πρέπει να προκύψει μέσα από την ενθάρρυνση των μαθητών να τους ανακαλύψουν. Η ολοκληρωμένη διατύπωση του τύπου, χωρίς να δίνεται σε αυτό και ιδιαίτερη έμφαση καθώς και η αιτιολόγησή του θα πρέπει να γίνεται από τους ίδιους τους μαθητές ως μία διαδικασία που απλοποιεί αυτούς τους υπολογισμούς.

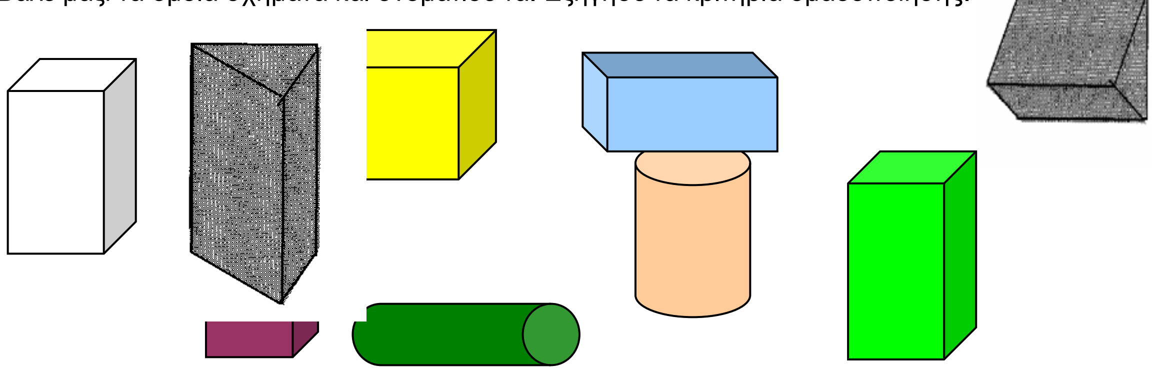
Προτείνονται αρχικά απλές, σε υπολογισμούς, δραστηριότητες όπως αυτή του κύβου, για να προσεγγίσουν οι μαθητές την έννοια της επιφάνειας και να βοηθηθούν να απλοποιήσουν υπολογισμούς με τη χρήση ενός τύπου.

Στην συνέχεια η προσέγγιση των άλλων σχημάτων γίνεται με αντίστοιχα βήματα. Η εύρεση ενός πιο γενικευμένου και συνολικού τύπου για την εύρεση των επιφανειών των στερεών σχημάτων αποτελεί μια ξεχωριστή δραστηριότητα αναζήτησης και γενίκευσης, που θα μπορούσε και να παραληφθεί κατά περίπτωση. Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται βασικά να μπορούν οι μαθητές να υπολογίζουν τις επιφάνειες στερεών σε πραγματικές καταστάσεις.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Δραστηριότητες αναγνώρισης

Βάλε μαζί τα όμοια σχήματα και ονομάτισε τα. Εξήγησε τα κριτήρια ομαδοποίησης.



2. Επιφάνεια στερεών – κύβος , ορθογώνιου, πρίσματος

Δραστηριότητα 1η

Κατασκεύασε από χαρτόνι ένα κύβο και στην συνέχεια υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου που έχεις κατασκευάσει.

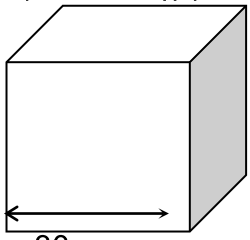
Γράψε τον τρόπο με τον οποίο κάνεις αυτό τον υπολογισμό:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Ο Πέτρος αγόρασε ένα δώρο για το φίλο του Ανδρέα και βρήκε ένα χαρτοκιβώτιο σε σχήμα κύβου με ακμή 30 εκ. για να το βάλει μέσα. Θέλει όμως να το καλύψει με ένα χρωματιστό χαρτί για να είναι πιο ωραίο. Πόσο χαρτί θα χρειαστεί;



Δραστηριότητα 3η

Με βάση όσα έκανες πριν, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Ακμή κύβου	**Εμβαδόν μιας έδρας**	**Εμβαδόν επιφάνειας κύβου**
3 cm		
5 cm		
9 cm		
12 cm		
α		

Τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου με ακμή **α** είναι:

Δραστηριότητα 4η

Με βάση τον κανόνα που βρήκες συμπλήρωσε επίσης και τον παρακάτω πίνακα:

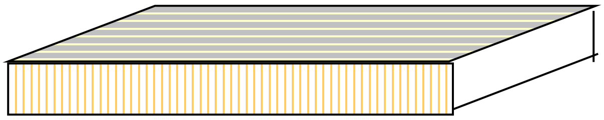
Ακμή κύβου	**Εμβαδόν μιας έδρας**	**Εμβαδόν επιφάνειας κύβου**
4 cm		
	36 cm^2	
9 cm		
		24 cm^2
	64 cm^2	
		600 cm^2

Δραστηριότητα 5η

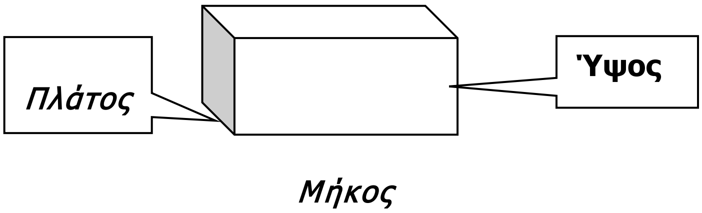
Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο. Υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου που έχεις κατασκευάσει.
Γράψε τον τρόπο με τον οποίο κάνεις αυτό τον υπολογισμό:

Δραστηριότητα 6η

Η Λουκία θέλει να ντύσει το στρώμα της, που έχει σχήμα ορθογώνιου με διαστάσεις 2 m, 1 m και 0,8 m με ύφασμα. Πόσο τετραγωνικά μέτρα ύφασμα θα χρειαστεί;



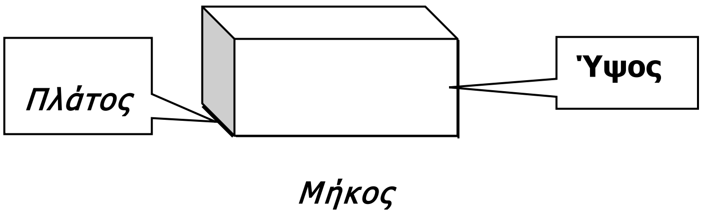
Δραστηριότητα 7η



Διαστάσεις			Έδρες			Εμβαδόν επιφάνειας ορθογωνίου
Μήκος	**Πλάτος**	**Ύψος**	**Μήκος x Πλάτος**	**Μήκος x Ύψος**	**Πλάτος x Ύψος**	
2	4	5				
8	6	3				
10	7	12				

Τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Δραστηριότητα 8η

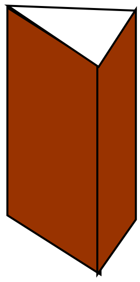


Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Διαστάσεις			Έδρες			Εμβαδόν επιφάνειας ορθογωνίου
Μήκος	**Πλάτος**	**Ύψος**	**Μήκος. x Πλάτος**	**Μήκος x Ύψος**	**Πλάτος x Ύψος**	
2	3		6	10		
	5	6		24	30	
10		7	50	70		

Βγάζουμε συμπεράσματα:
Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις **α, β, γ** είναι:

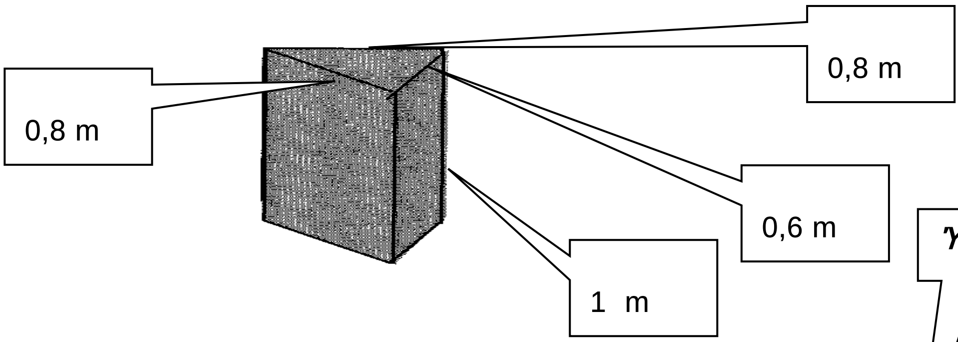
Δραστηριότητα 9η

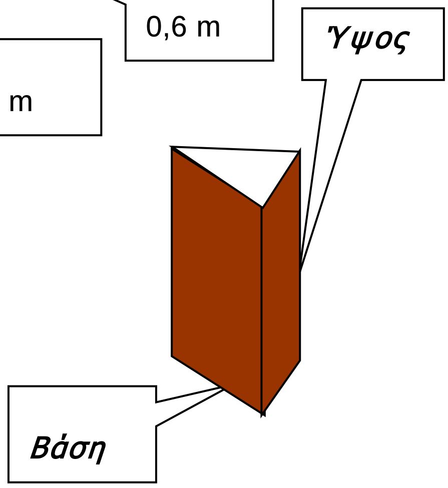


Κατασκεύασε ένα τριγωνικό πρίσμα. Υπολόγισε την χρωματισμένη επιφάνεια του ορθού πρίσματος που έχεις κατασκευάσει.
Γράψτε τον τρόπο με τον οποίο κάνεις αυτόν τον υπολογισμό:

Δραστηριότητα 10η

Ο Νικόλας θέλει να ντύσει με χρωματιστό χαρτί γύρω – γύρω, ένα μεγάλο κιβώτιο στο δωμάτιο του, που έχει σχήμα ορθού πρίσματος με διαστάσεις βάσης 0,6 m, 0,8 m και ύψος 1 m με χαρτί. Πόσο τ.μ. χαρτί θα χρειαστεί;





Δραστηριότητα 11η

Τι είναι το σχήμα πάνω στο οποίο στηρίζεται το πρίσμα, η βάση του; Αν θέλεις να υπολογίσεις όλη την επιφάνεια του πρίσματος, τι θα χρειαστεί να προσθέσεις στους προηγούμενες υπολογισμούς;
Βγάλε ένα συμπέρασμα.
Σύμφωνα με αυτό, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

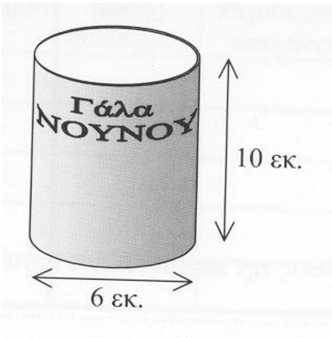
Διαστάσεις βάσης			Ύψος Βάσης (1η στήλη)	Εμβαδόν βάσης	Ύψος Πρισμ.	Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος
0,5	0,8	0,6	0,90			
2	2,5	3	3			
2,60	2,90	2,5	3,20			

Ποια στοιχεία σου χρειάζονται για να υπολογίσεις την επιφάνεια του πρίσματος;

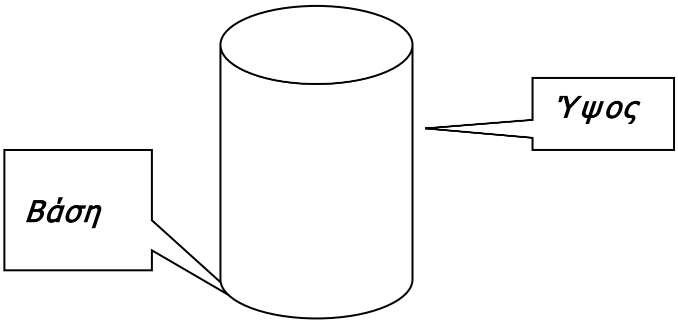
3. Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου - κώνου

Δραστηριότητα 1η

Ένα κουτί γάλα έχει διάμετρο 6 cm και ύψος 10 cm. Πόσα τετραγωνικά εκατοστά χαρτί χρειάζεται για περιτύλιγμα;



Δραστηριότητα 2η



Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Διάμετρος βάσης	**Εμβαδόν βάσης**	**Ύψος κυλίνδρου**	**Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου**
0,60		0,90	
2		3	
2,60		3,20	

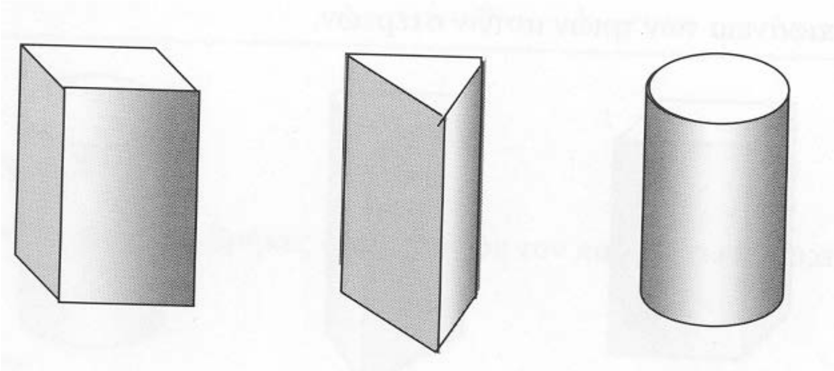
Τι συμπέρασμα βγάζουμε;

Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός πρίσματος είναι:………………………………

Δραστηριότητα 3η

Στα παρακάτω σχήματα, ονομάτισε τη χρωματισμένη επιφάνεια και την λευκή και βάλε σε ένα πίνακα τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε την επιφάνεια αυτή:

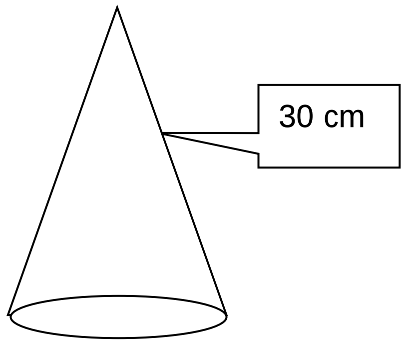
Εμβαδόν π. επιφάνειας ορθογωνίου	(2β + 2γ) . υ
Εμβαδόν π. επιφάνειας πρίσματος	(α+β+γ) . υ
Εμβαδόν π. επιφάνειας κυλίνδρου	(2πρ) . υ



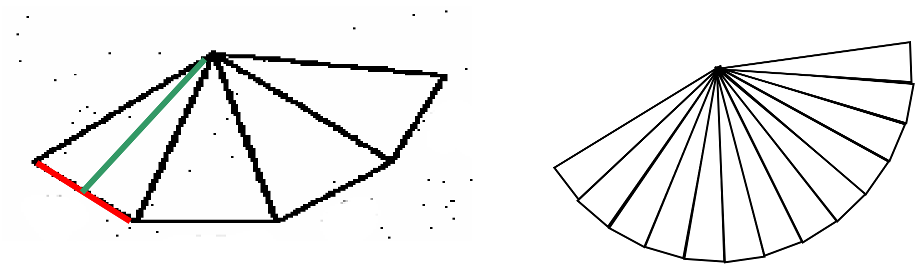
Τι είναι για το κάθε σχήμα η παράσταση που πολλαπλασιάζεται με το ύψος; Βρες ένα τύπου που να ισχύσει για όλα τα στερεά.

Δραστηριότητα 4η

Τα παιδιά στην τάξη ετοιμάζουν καπέλα για τα καρναβάλια. Φτιάξε κι εσύ ένα καπέλο με χαρτόνι. Τί σχήμα χρησιμοποιείς για να κάνεις τον κώνο;



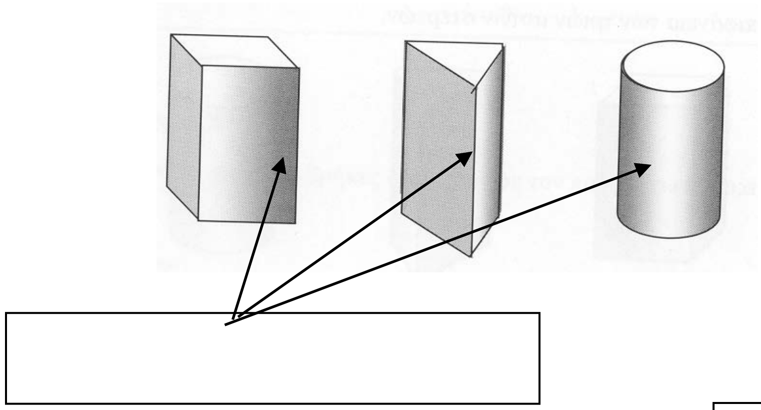
Χώρισε το σχήμα αυτό σε τέσσερα ίσα μέρη και υπολόγισε το εμβαδόν κάθε τριγώνου που σχηματίζεται. Σε όσα περισσότερα μέρη το χωρίζεις τόσο περισσότερο το εμβαδόν των τριγώνων προσεγγίζει αυτό του κώνου.
Αν η διάμετρος του κώνου είναι 10 cm, πόσο μήκος θα έχουν όλες οι βάσεις μαζί; Σε αυτό το σχήμα, τι παριστάνει ο ύψος του κάθε τριγώνου



Αν τα καπέλα πρέπει να έχουν πλευρά 30 cm και διάμετρο 10 cm, πόσο χαρτόνι θα χρειαστείς; Γράψε τον τρόπο με τον οποίο έκανες αυτόν τον υπολογισμό:
....……
....

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Πώς ονομάζεται η χρωματισμένη επιφάνεια των παρακάτω σχημάτων;



2. Πώς ονομάζεται η επιφάνεια στην οποία στηρίζεται το στερεό.
3.
4. Για να υπολογίσω την ολική επιφάνεια ενός στερεού χρειάζεται να προσθέσω:

Ολική Επιφάνεια = ☐ + ☐

5. Για να υπολογίσω την παράπλευρη επιφάνεια ενός στερεού χρειάζεται να πολλαπλασιάσω:

Παρ. Επιφάνεια = ☐ X ☐

Μέτρηση όγκων		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να υπολογίζουν τον όγκο ορθού πρίσματος και κυλίνδρου. Να υπολογίζουν τον όγκο της πυραμίδας και του κώνου. Να υπολογίζουν τον όγκο της σφαίρας	Υπολογίζουν τον όγκο του ορθογωνίου παρ/πέδου και του πρίσματος με πρακτικές μετρήσεις σε υποδείγματα στερεών. Προσεγγίζουν τους άλλους τύπους των όγκων των άλλων στερών «αναλογικά»

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Ο όγκος είναι μια οικεία έννοια για τους μαθητές που την προσεγγίζουν από το Δημοτικό. Η μέτρησή της όμως παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες, κυρίως όταν αφορά σχήματα όπως ο κύλινδρος ή ο κώνος. Συχνά η «χωρητικότητα» είναι βοηθητική για την κατανόηση της μέτρησης.

Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται και γίνει κατανοητή η μέτρηση του όγκου και να προκύψουν οι τύποι που βοηθούν αυτή τη μέτρηση. Οι σχέσεις ανάμεσα στους τύπους για τον όγκο είναι ανάλογες με εκείνες των εμβαδών. Υπάρχουν ομοιότητες ανάμεσα στα ορθογώνια, τα παραλληλόγραμμα και τα πρίσματα, καθώς και ανάμεσα στον κύλινδρο και τον κώνο που γενικεύονται, αν και η γενίκευση αυτή δεν είναι αυτονόητη.

Δυσκολίες των μαθητών

Συχνά οι μαθητές συγχέουν την επιφάνεια με τον όγκο, όπως και τις μονάδες μέτρησης. Μέσα από πραγματικά παραδείγματα και συγκεκριμένες μετρήσεις οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν την έννοια της μέτρησης του όγκου και να οδηγηθούν στη διαμόρφωση των τύπων και τη γενίκευσή τους.

Αν και το «γέμισμα» με ρευστά υλικά μειώνουν τη δομική φύση της κυβικής μονάδας, ωστόσο είναι βοηθητικοί για τη σύγκριση των όγκων.

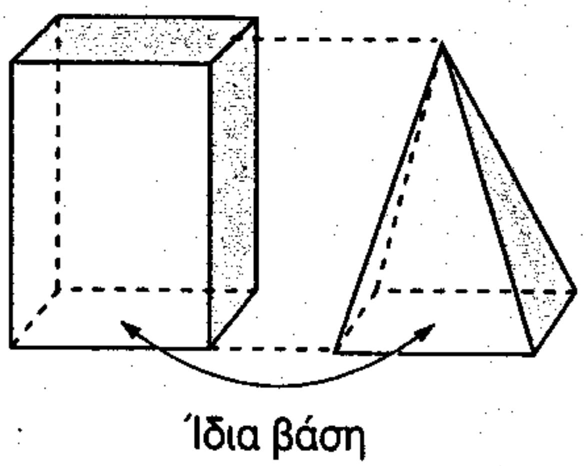
Συχνά επίσης το «γέμισμα» με κύβους δεν συνδέεται στους μαθητές με την έννοια του όγκου. Η μέτρηση των κύβων που γεμίζουν ένα στερεό και οι διαστάσεις που οδηγούν στον υπολογισμό του όγκου αποτελούν στην αντίληψη των μαθητών διαφορετικές καταστάσεις. Για το λόγο αυτό προτείνονται δραστηριότητες όπου η μέτρηση των κύβων γίνεται με τη βοήθεια των διαστάσεων. Αυτό βοηθά επίσης τους μαθητές να υπολογίσουν όλους τους κύβους χωρίς να παραλείπουν αυτούς που δεν φαίνονται και να συνδέσουν την μέτρηση με τον υπολογισμό του όγκου.

Διδακτικές υποδείξεις

Αρχικά, οι μαθητές οδηγούνται να κατανοήσουν τη διαδικασία μέτρησης του όγκου και να υπολογίσουν τον όγκο του ορθογωνίου παρ/δου. Η γενίκευση αυτής της μέτρησης στον τύπο *Όγκος = Εμβαδόν βάσης Χ ύψος*, είναι βοηθητικός για την προσέγγιση και των επόμενων τύπων. Οι μετασχηματισμοί του ορθογωνίου σε πλάγιο σχήμα στηρίζει αυτή την προσέγγιση αν και επιδιώκεται να πραγματοποιηθεί σε πραγματικές καταστάσεις με αντικείμενα.

Οι όγκοι των επόμενων στερεών στηρίζονται στην έννοια της χωρητικότητας και της σύγκρισης. Έτσι για παράδειγμα, οι μαθητές αδειάζουν το περιεχόμενο ενός κυλίνδρου σε ένα κύλινδρο με ίση ακτίνα βάσης και ίδιο ύψος για να αντιληφθούν ότι ο όγκος του είναι το 1/3 αυτού του κυλίνδρου.

Ο ίδιος τρόπος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση του όγκου της πυραμίδας.

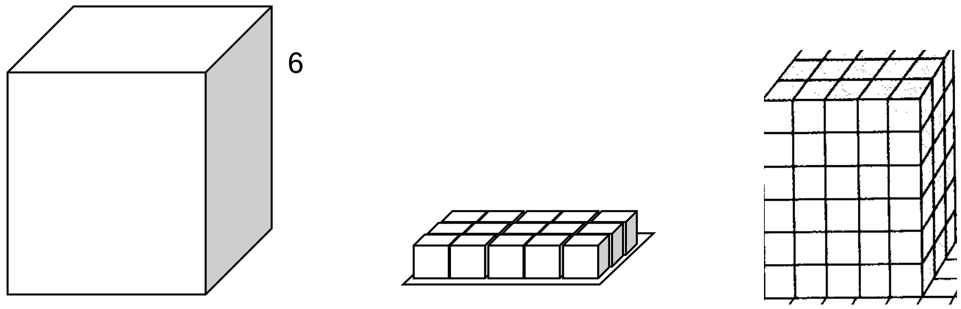


Ενδεικτικές δραστηριότητες

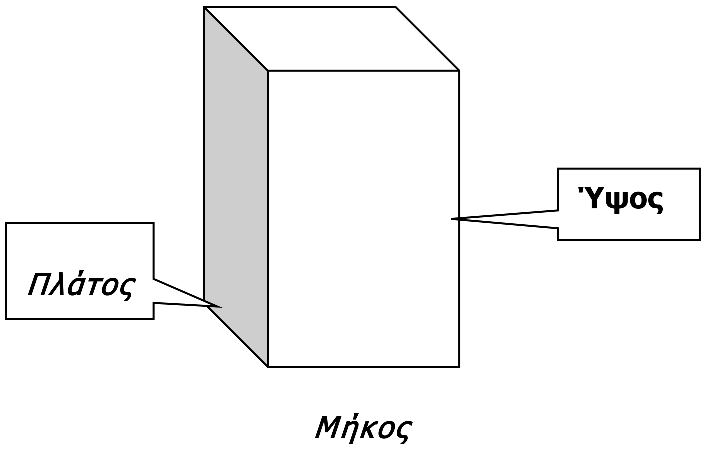
1. *Προσέγγιση της έννοιες του όγκου – ορθογώνιο*

Δραστηριότητα 1η

Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τοποθέτησε στη βάση του ξύλινα κυβάκια (υπολογίζουμε οι διαστάσεις του ορθογωνίου να είναι πολλαπλάσιες της έδρας των κύβων) και υπολόγισε πόσα χωράει. Στη συνέχεια υπολόγισε με του νου πόσα χωράνε όλο το στερεό.



Δραστηριότητα 2η



Συμπλήρωσε τον πίνακα:

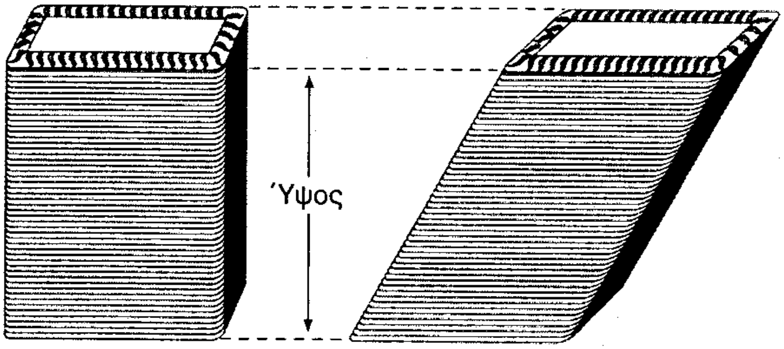
Διαστάσεις				Όγκος
Μήκος	**Πλάτος**	**Ύψος**	**Εμβαδόν βάσης (μήκος Χ πλάτος)**	**Ορθογωνίου Παραλληλογράμμου**
2	4	5		
8,20	6	3,10		
10	7,20	12		
α	β	υ		

Τι συμπέρασμα βγάζουμε;
Ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι:

Δραστηριότητα 3η

Υλικά: Τράπουλες ή στοίβες βιβλία ή πάκα χαρτί Α4.

Τοποθέτησε τα τραπουλόχαρτα το ένα πάνω από το άλλο και κατασκεύασε ένα ορθογώνιο. Μετακίνησε τα τραπουλόχαρτα ώστε να δημιουργηθεί ένα πλάγιο σχήμα και να σύγκρινε τους δύο όγκους.



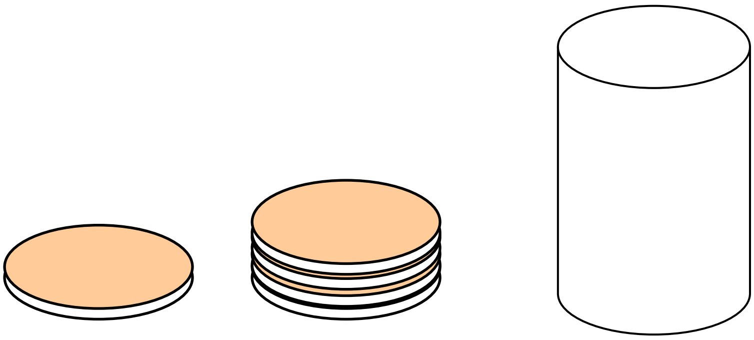
Ποιος θα είναι ο τύπος του όγκου του πλάγιο σχήματος;

2. *Όγκος κυλίνδρου*

Δραστηριότητα 4η

Υλικά: Κυκλικά σχήματα

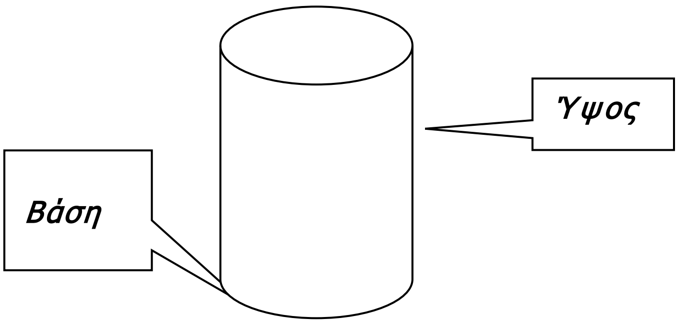
Κατασκεύασε ένα κύλινδρο με βάση ένα κυκλικό σχήμα (που έχει πάχος 1 cm) και τοποθέτησε το ένα σχήμα πάνω στο άλλα.



Αν η διάμετρος του κυκλικού σχήματος είναι 6 cm, πόσο είναι το εμβαδόν του κυκλικού σχήματος (βάσης); Αν το ύψος του σχήματος είναι 1 cm, πόσα σχήματα χωράνε στον κύλινδρο που έφτιαξες;

Με την κατασκευή αυτή, μπορείς να υπολογίσεις τον όγκο του κυλίνδρου;

Δραστηριότητα 5η



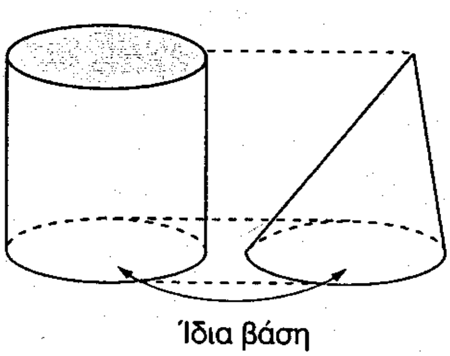
Σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Διάμετρος βάσης	**Εμβαδόν βάσης**	**Ύψος**	**Όγκος κυλίνδρου**
2		3	
0,60		0,90	
2,60		3,20	
δ		υ	

Τι συμπέρασμα βγάζουμε;
Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ……………………………..

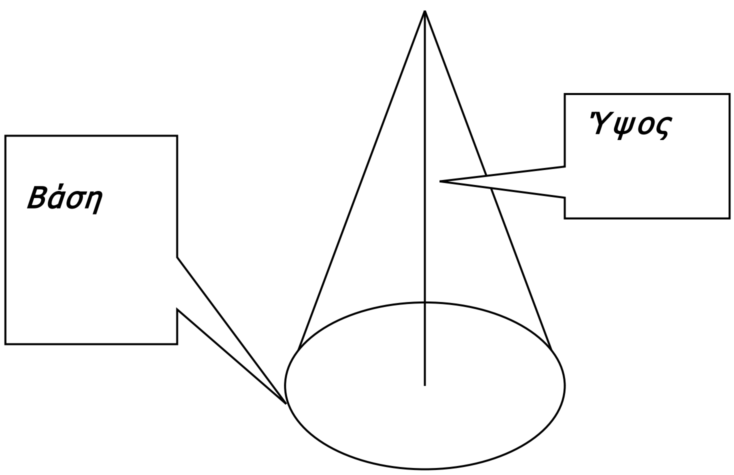
3. Όγκος κώνου

Δραστηριότητα 6η



Κατασκεύασε ένα κύλινδρο και ένα κώνο με ίδια βάση και ίδιο ύψος. Γέμισε τον κώνο με ρύζι (ή άμμο ή άλλο ρευστό υλικό) και εξέτασε πόσες φορές χωράει το περιεχόμενο του κώνου στον κύλινδρο.
Πόσες φορές μεγαλύτερος είναι ο όγκος του κώνου από αυτόν του κυλίνδρου;
Ποιος είναι ο τύπος για τον όγκο του κώνου;

Δραστηριότητα 7η

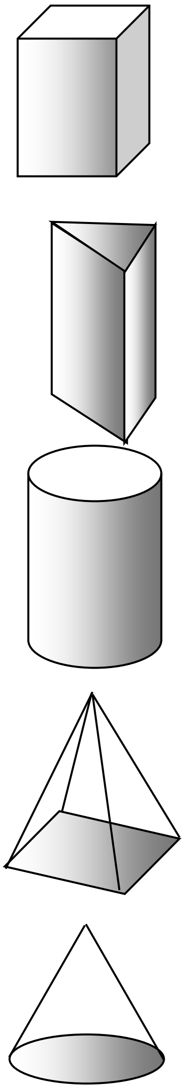


Με βάση τον τύπο που έβγαλες, συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Διάμετρος βάσης	**Εμβαδόν βάσης**	**Ύψος**	**Όγκος Κώνου**
3		3	
0,80		0,90	
2,60		3,50	
δ		υ	

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Αντιστοίχισε τα σχήματα με τους τύπους



Όγκος = Εμβαδόν βάσης Χ ύψος

Όγκος = 1/3 Εμβαδόν βάσης Χ ύψος

Έννοιες κατά θεματικό άξονα για την Γ' Τάξη

- *Αλγεβρικές παραστάσεις*, Πράξεις με πολυώνυμα

Πράξεις με πολυώνυμα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να βρίσκουν την τιμή μιας αριθμητική παράστασης	Να βρίσκουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης. Να διακρίνουν αν μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο ή πολυώνυμο και να προσδιορίζουν το βαθμό του. Να διακρίνούν αν δύο πολυώνυμα είναι ίσα. Να προσθέτουν, να αφαιρούν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μονώνυμα. Να προσθέτουν και να αφαιρούν πολυώνυμα. Να χρησιμοποιούν την αναγωγή των όμοιων όρων για την απλούστευση της γραφής ενός πολυωνύμου	Βρίσκουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης. Διακρίνουν τα μονώνυμα από τα πολυώνυμα. Προσθέτουν, αφαιρούν, πολλαπλασιάζουν και διαιρούν μονώνυμα. Προσθέτουν και να αφαιρούν απλά πολυώνυμα.
	Να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο, καθώς και πολυώνυμο με πολυώνυμο	Πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο σε απλή μορφή.

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Η προηγούμενη ενασχόληση των μαθητών με τις αλγεβρικές παραστάσεις, τις εξισώσεις και τις συναρτήσεις, τους βοηθά στην ενασχόληση με τα πολυώνυμα. Στην ενότητα αυτή επιδιώκουμε να εξοικειωθούν στις πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα (NCTM, 2000).

Η προτεραιότητα των πράξεων, η χρήση παρενθέσεων και η εύρεση τιμών μιας αλγεβρικής παράστασης αποτελούν προϋποθέσεις για την αντιμετώπιση πράξεων με πολυώνυμα. Η διάκριση των διαφορετικών μονώνυμων αποτελεί το πρώτο βήμα στην προσέγγιση των πράξεων με τα πολυώνυμα.

Δυσκολίες μαθητών

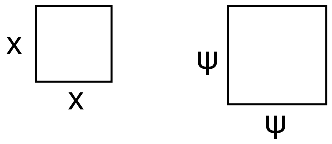
Οι δυσκολίες των μαθητών με τη συμβολικές παραστάσεις αναφέρθηκαν στην ενότητα των εξισώσεων και των συναρτήσεων.

Για το ξεπέρασμα των δυσκολιών αυτών είναι σημαντικό να εξοικειωθούν με πιο άμεσες μορφές παραστάσεων, όπως τα σχήματα, που θα δώσουν νόημα και στις συμβολικές παραστάσεις.

Διδακτικές υποδείξεις

Αν και το σημαντικότερο στοιχείο αυτής της ενότητας είναι η διάκριση των μονωνύμων, οι πρώτες δραστηριότητες είναι απαραίτητο να υπενθυμίσουν στους μαθητές βασικές ιδιότητες των πράξεων στις αλγεβρικές παραστάσεις. Αποφεύγεται η εκμάθηση τυπικών διαδικαστικών βημάτων και το ενδιαφέρον επικεντρώνεται να κατανοήσουν οι μαθητές τη λογική και τους κανόνες που διέπουν την εκτέλεση των πράξεων.

Οι επόμενες δραστηριότητες στοχεύουν να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τα διαφορετικά ήδη μονωνύμων. Προτείνονται καταστάσεις που δίνουν στις παραστάσεις αυτές νόημα ώστε να αποφύγουμε να τις αντιμετωπίζουν οι μαθητές ως σύμβολα χωρίς κατανόηση.
Για το λόγο αυτό, όπου είναι δυνατό, χρησιμοποιούνται σχηματικές παραστάσεις, για παράδειγμα το x^2 και το $ψ^2$ παρουσιάζονται όπως στο σχήμα,
γεγονός που βοηθάει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι αποτελούν



δύο διαφορετικά στοιχεία, τα οποία δεν μπορούν να συνδυάσουν. Η παραπάνω σχηματοποίηση αν και δεν καλύπτει εννοιολογικά τις αλγεβρικές παραστάσεις, για παράδειγμα δεν μπορεί να παραστήσει το $x^2ψ^2$, ωστόσο είναι υποστηρικτική στην κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Προτεραιότητα πράξεων

Δραστηριότητα $1^η$

Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 2, 3 και 5 από μία φορά και κάνοντας όποια από τις τέσσερις βασικές πράξεις θέλεις, βγάλε το μεγαλύτερο και το μικρότερο θετικό και ακέραιο αποτέλεσμα (*το μικρότερο είναι 0 και το μεγαλύτερο 30*).
Ποιες πράξεις θα κάνεις για να βρεις 21 και ποιες για να βρεις 25; Γράψε μια παράσταση για την κάθε μία.

Δραστηριότητα $2^η$

Κάνοντας τις πράξεις επιβεβαίωσε το αποτέλεσμα:
4 x (4+4) x 4 = 128
(4 x 4) + (4 x 4) = 32
[(4 x 4) + 4] = 80

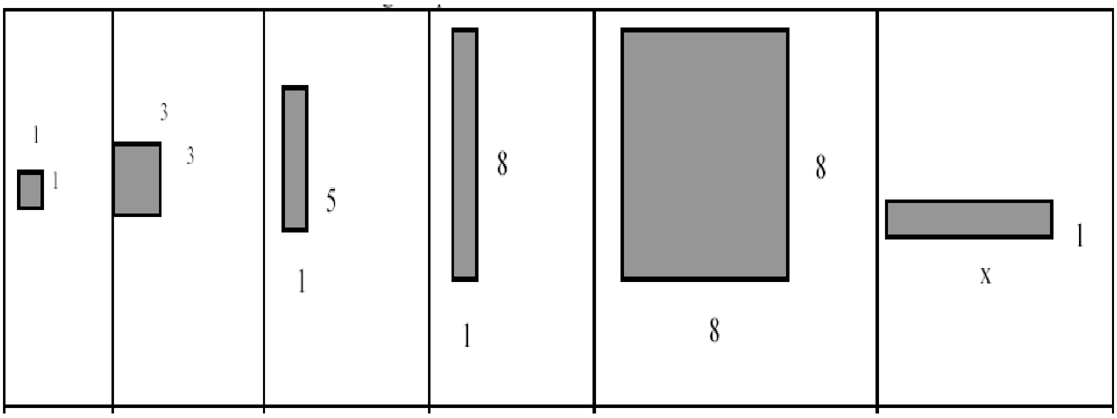
Δραστηριότητα $3^η$

Αν χ = 5, βρες τις τιμές των παραστάσεων:
$7.x - 1$
$3x^2 – 2x + 4$
$- 2x^2 – 8x – 3$
$2x^2 – 10$

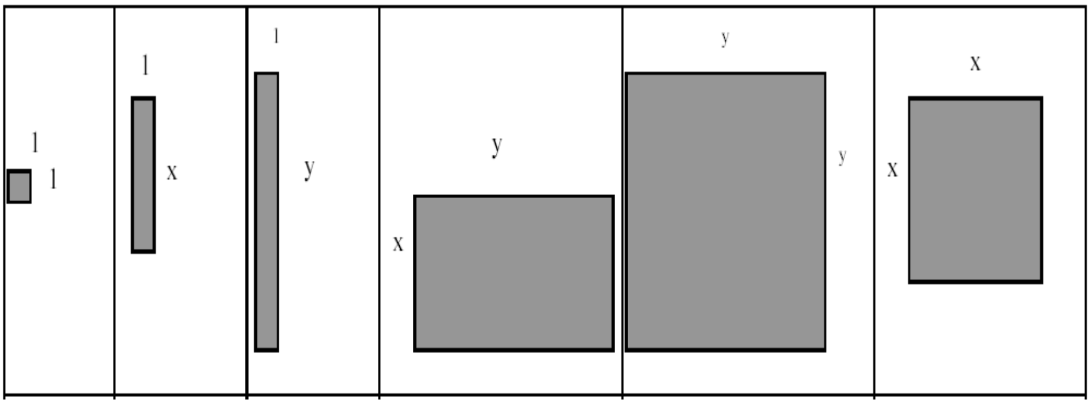
2. Διάκριση μονώνυμων

Δραστηριότητα 4η

Γράψε για κάθε σχήμα την επιφάνειά του:



Κάνε το ίδιο και στα παρακάτω σχήματα:



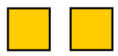
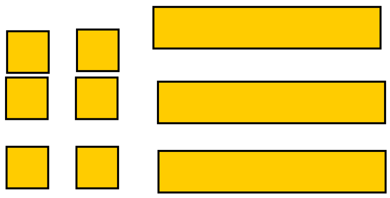
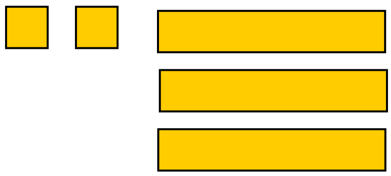
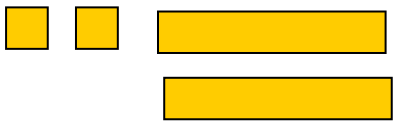
Δραστηριότητα 5η

Με βάση το παρακάτω σχήμα, σχημάτισε τις παραστάσεις:

1 x **Λεκτική έκφραση**	**Σχήμα**	**Αλγεβρική έκφραση**
Πάρε ένα άγνωστο σχήμα		x
Πρόσθεσε 3		
Διπλασίασε		
Πρόσθεσε κι ένα τετράγωνο με πλευρά x		
Αφαίρεσε 1		

Δραστηριότητα 6^{η}

Όμοια συμπλήρωσε και τον πίνακα:

Λεκτική έκφραση	**Σχήμα**	**Αλγεβρική έκφραση**
		
		
		
		
		

Δραστηριότητα 7^{η}

Σχεδίασε τα αντίστοιχα σχήματα για τις αλγεβρικές εκφράσεις:

$2x + 3$

$x^2 + 2$

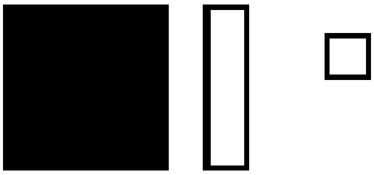
$x^2 + ψ^2$

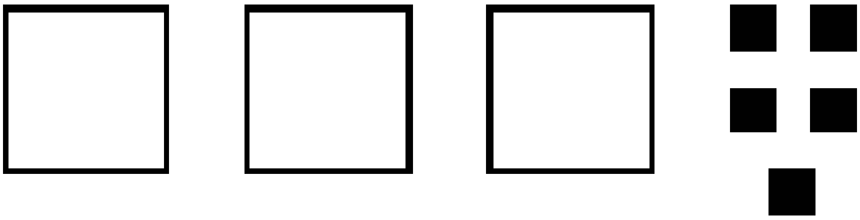
$2x^2 + 1$

$3x^2 + 3x + 2ψ^2$

Δραστηριότητα 8η

Αν παριστάνουμε με μαύρο τις θετικές ποσότητες και με άσπρο τις αρνητικές γράψε τις αλγεβρικές εκφράσεις για τα παρακάτω σχήματα:





Δραστηριότητα 9η

Βάλε σε ομάδες τα ίδια μονώνυμα και εξήγησε τον τρόπο που το έκανες:

x^2 4 $3x$ $ψ^2$ $xψ$ $2ψ$ $3x^2$ $2ψ^2$ $5xψ$ $10ψ$ 7

x

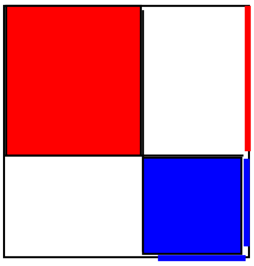
Δραστηριότητα 10η

Κάνε το ίδιο και στην παράσταση που ακολουθεί, βρίσκοντας για κάθε ομάδα ένα αποτέλεσμα:

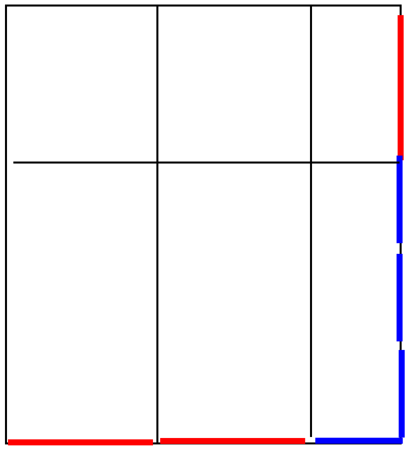
$5ψ^2 - x^2 - 5xψ + 7 + 3x - ψ^2 + 8xψ – 2ψ + 3x^2 + 10ψ – 6 + 2x$

Δραστηριότητα 11η

Υπολόγισε το εμβαδόν του παρακάτω τετραγώνου και συμπλήρωσε την ισότητα: $(x+2)^2$ =



Κάνε το ίδιο και στον παρακάτω πολλαπλασιασμό:
(2x + 1). (x + 3) =



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Αντιστοίχισε με το σωστό αποτέλεσμα:

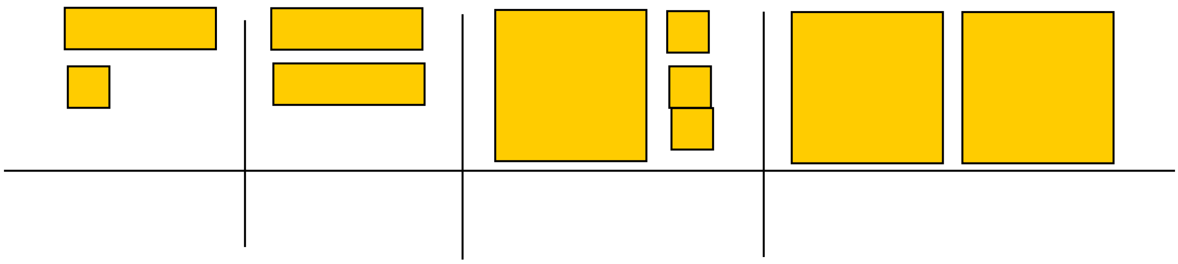
2 + (3 x 4) - 5 =

(2 + 3) x 4 – 5 =

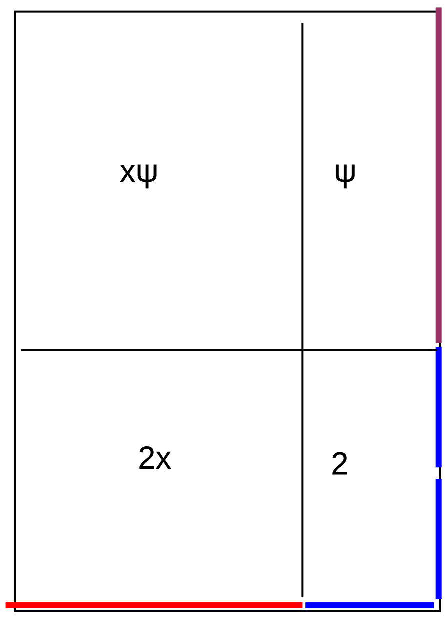
2 + 3 x (4 - 5) =

15
-1
9

2. Βάλε κάτω από κάθε σχήμα μια αλγεβρική παράσταση;



2. Βρες τις πλευρές του σχήματος



Ταυτότητες

Απλές ταυτότητες		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες $(\alpha\pm\beta)^2= \alpha2\pm2\alpha\beta+\beta2$ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)= \alpha2 - \beta2$ $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha3\pm3\alpha2\beta+3\alpha\beta2\pm\beta3$ $\alpha3+\beta3= (\alpha+\beta)(\alpha2-\alpha\beta+\beta2)$ $\alpha3 - \beta3 = (\alpha-\beta)(\alpha2 +\alpha\beta +\beta2)$ και να μπορούν να τις αποδεικνύουν. Να αποδεικνύουν μια απλή ταυτότητα	Προσεγγίζουν την έννοια της ταυτότητας Δημιουργούν και αναγνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες μέσα από γεωμετρικές παραστάσεις.

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Η προσέγγιση της έννοιας της ταυτότητας απαιτεί την αναγνώριση μιας νέας μορφής ισότητας και σχέσης. Ο ρόλος της ταυτότητας στις αλγεβρικές παραστάσεις απλοποιεί τις πράξεις και τυποποιεί παραστάσεις. Επίσης η αντίστροφη χρήση των ταυτοτήτων βοηθά στην παραγοντοποίηση παραστάσεων.

Ωστόσο, η λειτουργική προσέγγιση των ταυτοτήτων απαιτεί την δημιουργία τους από τους ίδιους τους μαθητές.

Δυσκολίες των μαθητών

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενες ενότητες, οι μαθητές χρησιμοποιούν την ισότητα ως το αποτέλεσμα μιας σειράς πράξεων, δεν την αντιμετωπίζουν δηλαδή ως σύμβολο που υποδηλώνει μία σχέση.

Η εξοικείωση τους με τις εξισώσεις και τις συναρτήσεις τους βοηθά να προσεγγίσουν τη μορφή ισότητας που χρησιμοποιείται στις ταυτότητες, με τη σημασία «το μέρος Α είναι ίσο με το μέρος Β».

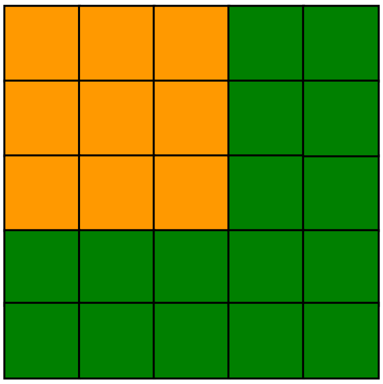
Μέσα στα συστηματικά λάθη που καταγράφονται στην ενότητα αυτή είναι η μεταφορά ιδιοτήτων που δεν εφαρμόζονται στις πράξεις, όπως το $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$ ή $\alpha^2 – \beta^2= (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$. Η συστηματική και σχηματική μελέτη των σχέσεων αυτών όπως και η εξοικείωση με την σχηματική παράσταση των συμβόλων της προηγούμενης ενότητας στηρίζει σημαντική την δημιουργία των ταυτοτήτων από τους ίδιους του μαθητές, αν και δεν αποδεικνύεται αρκετή για την άνετη χρήση τους. Επίσης δεν μπορούν να καλύψουν τις ταυτότητες ανώτερων δυνάμεων, όπως το $(\alpha+\beta)^3$. Συνίσταται η χρήση υλικού.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

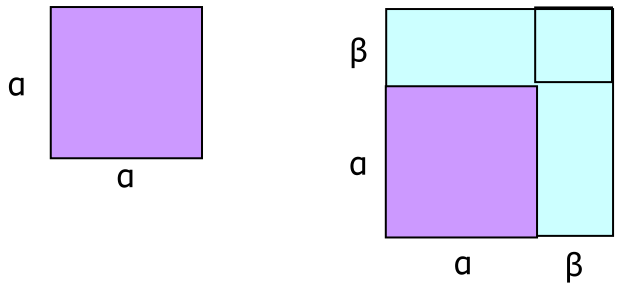
Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 3 cm. Πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι η επιφάνειά του.

Αν αυξήσουμε την κάθε πλευρά κατά 2 cm , πόσο θα αυξηθεί το εμβαδόν της επιφάνειά του; Δώσε μια απάντηση με το νου, στη συνέχεια επιβεβαίωσε την απάντηση με βάση το σχήμα.

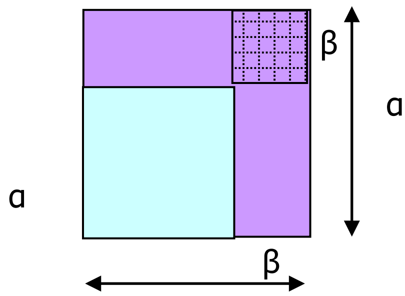


Δραστηριότητα 2η

Κατασκεύασε ένα τετράγωνο με πλευρά α και αύξησε κατά β κάθε πλευρά. Συμπλήρωσε με τα απαραίτητα κομμάτια. Δοκίμασε να μεταφέρεις το συμπέρασμα στον υπολογισμό της παράστασης $(α+β)^2$.

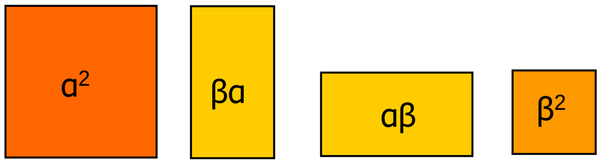


Κατασκεύασε ένα ίδιο τετράγωνο με πλευρά α και μείωσε κάθε πλευρά κατά β. Αφαίρεσε τα απαραίτητα κομμάτια. Δοκίμασε να μεταφέρεις το συμπέρασμα στον υπολογισμό της παράστασης $(α-β)^2$.



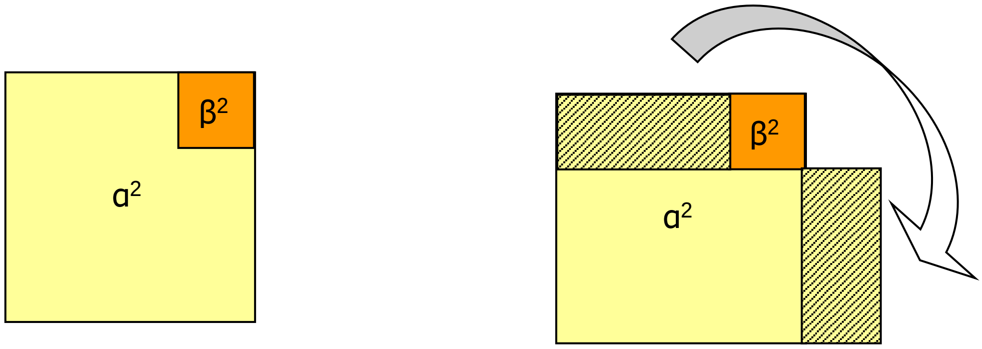
Δραστηριότητα 3η

Τα παρακάτω σχήματα δημιουργούν ένα τετράγωνο. Βρες τον τρόπο.



Δραστηριότητα 4η

Από το παρακάτω τετράγωνο $α^2$ έχουμε κόψει ένα μικρότερο $β^2$. Πόση είναι η επιφάνεια του σχήματος που παραμένει;



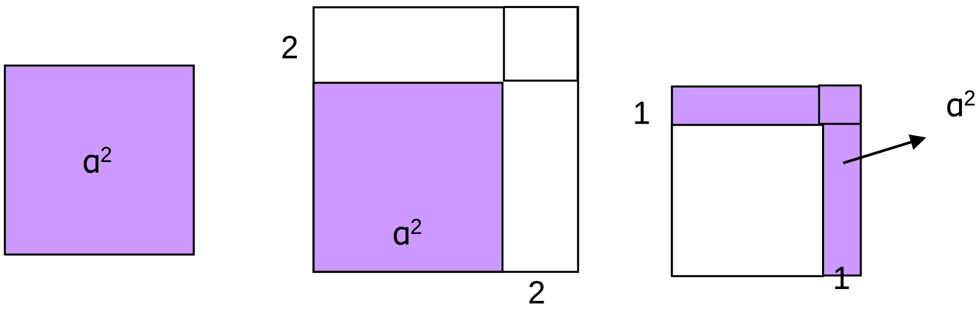
Δοκίμασε να μεταφέρεις το συμπέρασμα στον υπολογισμό της παράστασης $α^2-β^2$.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

$(x+ψ)^2$	
$(x+ψ).(x+ψ)$	
$(x+ψ)(x-ψ)$	

2. Από το τετράγωνο με πλευρά α, βρες το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α+2 και του τετραγώνου με πλευρά α-1.



3. Αν από το τετράγωνο με εμβαδόν κ, αφαιρέσεις ένα τετράγωνο με εμβαδόν 5^2, βρες το εμβαδόν του σχήματος που απομένει.

- Εξισώσεις

Εξίσωση δευτέρου βαθμού		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να λύνουν εξισώσεις α' βαθμού	Να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων. Να βρίσκουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και να υπολογίζουν τις λύσεις της με τη βοήθεια του τύπου. Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων. Να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού	Λύνουν εξισώσεις απλές β' βαθμού με ένα και δύο όρους. Προσεγγίζουν γεωμετρικά την έννοια της λύσης εξίσωσης βαθμού με σε γεωμετρικές παραστάσεις.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει το νόημα των εξισώσεων, από τις εξισώσεις α' βαθμού, η εξίσωση β' βαθμού με ένα ή δύο όρους είναι δυνατό να προσεγγισθεί.

Η ανάπτυξη και τυποποίηση της εξίσωσης β' βαθμού αποτελεί μια περίπλοκη και συχνά ακατανόητη για τους μαθητές διαδικασία. Κάποιες γεωμετρικές προσεγγίσεις βοηθούν για να αποκτήσει νόημα αυτή η διαδικασία, αλλά η πλήρης κατανόησή της είναι μάλλον δύσκολη για τους μαθητές με ΜΔ, δεδομένου ότι απαιτεί τον άνετο χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων με τις οποίες δεν είναι προφανές ότι μπορούν να εξοικειωθούν (Bednarz et als, 1996).

Έτσι στην ενότητα αυτή επιδιώκεται μια γενική προσέγγιση της μορφής που μπορεί να πάρει η λύση μιας εξίσωσης ανώτερης τάξης.

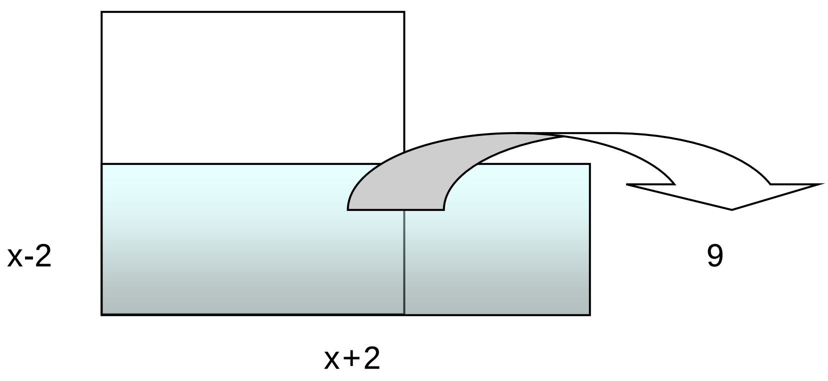
Διδακτικές υποδείξεις

Δοκιμάζουμε να αντιληφθούν οι μαθητές τη σημασία της επίλυσης β' θμιας εξίσωσης και να κάνουν μια πρώτη προσέγγιση της λύσης της.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

Μεγάλωσε την πλευρά ενός τετραγώνου κατά 2 cm και μίκραινε την άλλη κατά 2 cm. Το σχήμα που δημιουργήθηκε έχει εμβαδόν 9 cm². Πόσο ήταν η πλευρά του αρχικού εξαγώνου;



Δραστηριότητα 2η

Πόση είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου που η μία κάθετη πλευρά είναι 6 cm και η άλλη 8 cm;

Δραστηριότητα 3η

Η πλευρά ενός τετραγώνου αυξήθηκε κατά 4 cm και το εμβαδόν του νέου τετραγώνου είναι 16 cm^2. Πόσο ήταν το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου;

Δραστηριότητα 4η

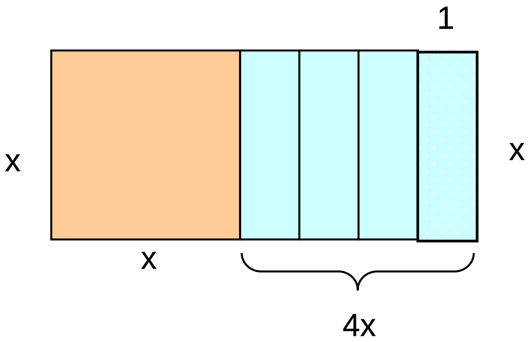
Από τον παρακάτω πίνακα κάνε μια γραφική παράσταση σε τετραγωνισμένο χαρτί. Στο ίδιο σύστημα αξόνων κάνε τη γραφική παράσταση και της δεύτερης σειράς. Βρες ένα τύπο για κάθε μία συνάρτηση.

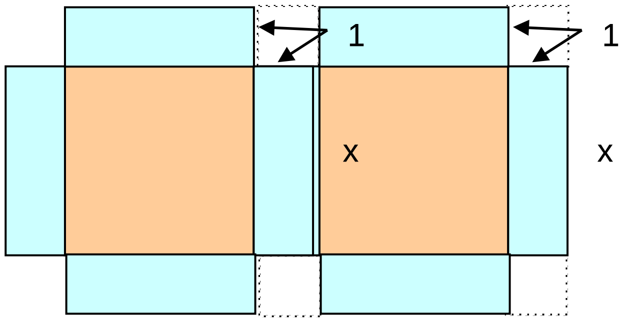
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
ψ	9	4	1	0	1	4	9
ψ’	11	6	3	2	3	6	11

Για ποια τιμή του x το ψ= 16 και για ποια τιμή του x το ψ’ = 27;

Δραστηριότητα 5η

Ο Άραβας Μαθηματικός Al- Khwarizmi προσπάθησε να λύσει μια εξίσωση β’ βαθμού, που έμοιαζε με την $x^2+4x = 20$ χρησιμοποιώντας σχήματα. Πίστευε ότι όλο το πρόβλημά του ήταν να υπολογίσει το x όταν το ορθογώνιο του σχήματος έχει εμβαδόν 10. Έτσι έκοψε το 4x σε κομμάτια και σχημάτισε με αυτό ένα πιο απλό σχήμα με το ίδιο εμβαδόν. Το νέο σχήμα είναι ένα τετράγωνο από το οποίο λείπουν οι τέσσερις μικρές τετράγωνες γωνίες.





Πόσο είναι το εμβαδόν το κάθε μικρού τετραγώνου……….. ; *(1^2)*

Πόσο είναι το εμβαδόν όλου του τετραγώνου (μαζί με τα τετράγωνα)………… ; (*$(x+1)^2$*)

Τι χρειάζεται να αφαιρεθεί ώστε να απομείνει το εμβαδόν που είναι ισοδύναμο με 20…….. ; (*$(x+1)^2 = 20 – 4. 1^2$*)

Νομίζεις ότι ο Al- Khwarizmi κατάφερε να βρει το x; Πόσο είναι;

$(x+1)^2 = 16$

$X+1 = 4$

$X= 4-1$

- **Γραμμικά Συστήματα**

Απλά γραμμικά συστήματα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να λύνουν γραμμικές εξισώσεις	Να παριστάνουν γραφικά μια γραμμική εξίσωση. Να λύνουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα. Να λύνουν ένα γραμμικό σύστημα με τη μμέθοδο: -της αντικατάστασης -των αντίθετων συντελεστών. Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια συστήματος	Λύνουν απλά πρόβλημα τα που δημιουργού συστήματα Παριστάνουν και λύνουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Οι μαθητές γνωρίζουν από τα προηγούμενα χρόνια να αντιλαμβάνονται και να λύνουν εξισώσεις α’ βαθμού, όπως και να δημιουργούν μια εξίσωση από ένα πρόβλημα. Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται να αντιμετωπίζουν προβλήματα που δημιουργούν δύο εξισώσεις και να βρίσκουν τις λύσεις. Ο στόχος δεν είναι να ασκηθούν στις λύσεις συστημάτων με τυπικές διαδικασίες αλλά στην εύρεση των κοινών λύσεων και την παράστασή της με γραφικό τρόπο. Οι συναρτήσεις και η εύρεση τιμών στον πίνακα και τις γραφικές παραστάσεις μπορεί να στηρίξει την λύση των απλών συστημάτων.

Στα συστήματα συναντούμε και τις ειδικές περιπτώσεις της αοριστίας και της ταυτότητας. Οι έννοιες αυτές προσεγγίζονται μέσα από τις γραφικές παραστάσεις.

Διδακτικές υποδείξεις

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες ξεκινούν από απλά προβλήματα όπου αναζητούνται δύο τιμές και όπου η εύρεση της μίας στηρίζεται στην εύρεση της άλλης. Στη συνέχεια προτείνονται προβλήματα «βέλτιστης λύσης» σε οικείες και καθημερινές καταστάσεις.

Οι γραφικές παραστάσεις με τα σημεία τομής που ενθαρρύνονται όπως και οι παράλληλες ή ταυτιζόμενες ευθείες βοηθούν τους μαθητές να προσεγγίσουν το νόημα της χρήσης συστημάτων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Προβλήματα με δύο εξισώσεις

Δραστηριότητα 1^{η}

Ο Πέτρος και η αδελφή του Μαρία, έχουν ηλικίες που αν στην ηλικία του Πέτρου προσθέσεις την διπλάσια ηλικία της Μαρίας το άθροισμα είναι μισός αιώνας. Ο Πέτρος, πριν 5 χρόνια ήταν 19 χρονών. Ποιες είναι η ηλικίες τους σήμερα;

Δραστηριότητα 2^{η}

Δυο γυμναστήρια προτείνουν στους πελάτες τους τις εξής τιμές:

- Το πρώτο: εγγραφή 40 € και συνδρομή 20 € το μήνα.
- Το δεύτερο: συνδρομή 30 € το μήνα.

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος σε μήνες	1	2	3	4	5	6
$1^{ο}$: Χρήματα σε €	60					
$2^{ο}$: Χρήματα σε €	30					

Ποιο μήνα θα έχει πληρώσει ο πελάτης τα ίδια χρήματα. Ποιο γυμναστήριο είναι φθηνότερο το χρόνο.

Κάνε μια γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα ημιαξόνων.

Δραστηριότητα $3^{η}$

Η Telestet δίνει πάγιο 15 €. και χρέωση 0,005 € ανά δευτερόλεπτο.

Η Cosmote δίνει πάγιο 17 € και χρέωση 0,006 € ανά δευτερόλεπτο.

Γράψε δύο τύπους που σε βοηθούν να υπολογίσεις το κόστος για τη μία και την άλλη εταιρεία.

Για πόσο χρόνο ομιλίας πληρώνεις και στις δύο εταιρείες τα ίδια χρήματα;

Από ποιο χρόνο και μετά σε κάποια εταιρεία πληρώνεις λιγότερα χρήματα.

Κάνε μια γραφική παράσταση.

Δραστηριότητα $4^{η}$

Σε μια πόλη κυκλοφορούν κίτρινα και πράσινα ταξί. Τα κίτρινα υπολογίζουν το κόστος της διαδρομής χρεώνοντας 0,4 € το χιλιόμετρο. Τα πράσινα χρεώνουν πτώση σημαίας 0,7 € (ως πάγιο, ανεξάρτητα από τα χιλιόμετρα) και 0,3 € το χιλιόμετρο.

Να κατασκευάσεις έναν πίνακα που να δείχνει συγκριτικά πόσο θα πληρώσει ο κάτοικος της πόλης αυτής σε διάφορες διαδρομές που θα κάνει χρησιμοποιώντας πράσινο και κίτρινο ταξί.

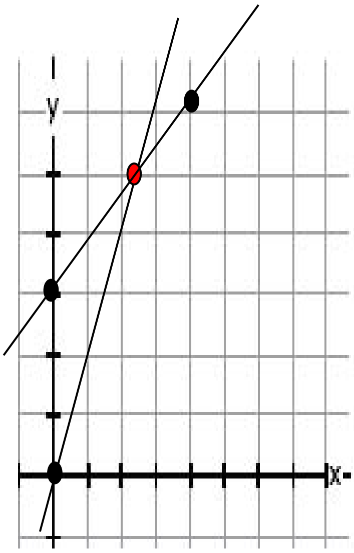
Σε ποια περίπτωση τον συμφέρει να χρησιμοποιήσει τη μία ή την άλλη εταιρεία;

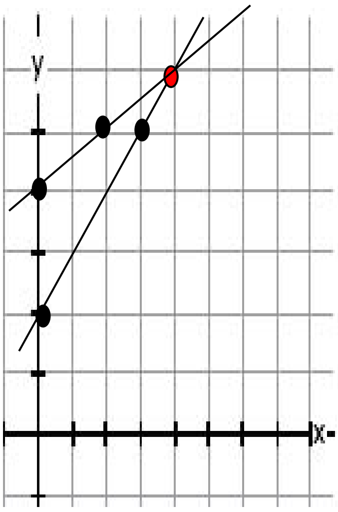
Δραστηριότητα $5^{η}$

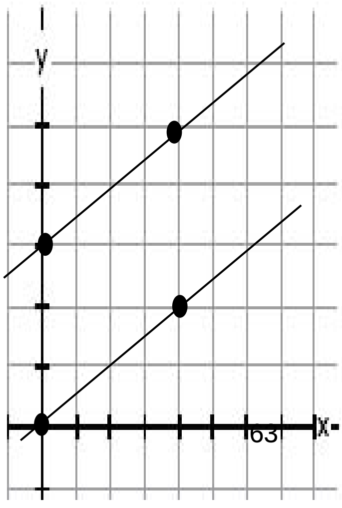
Δύο αδέλφια έχουν διαφορά ηλικίας 5 χρόνια. Όταν οι ηλικίες τους θα έχουν διπλασιαστεί η διαφορά τους θα είναι 10 χρόνια. Αν ονομάσεις την ηλικία του ενός x και του άλλου ψ, γράψε δύο εξισώσεις που παρουσιάζουν αυτές τις σχέσεις. Κάνε μια γραφική παράσταση. Μπορείς να βρεις τις ηλικίες χ και ψ;

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Γράψε τις σχέσεις που παρουσιάζουν τις παρακάτω ευθείες και δώσε μία ερμηνεία για την κοινή τους λύση.







Ομοιότητα και ομοιοθεσία

Όμοια Πολύγωνα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να βρίσκουν το ομοιόθετο ενός πολυγώνου με κέντρο ένα σημείο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ. Να γνωρίζουν ότι το ομοιόθετο ενός πολυγώνου ως προς ένα σημείο Ο και με λόγο έναν θετικό αριθμό λ είναι μια μεγέθυνση του αρχικού πολυγώνου αν λ>1 και μια σμίκρυνση αυτού αν 0<λ<1. Να γνωρίζουν ότι δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν το ένα από αυτά είναι μμεγέθυνση του άλλου. Να γνωρίζουν (χωρίς απόδειξη) ότι σε δυο όμοια ευθύγραμμα σχήματα οι ομόλογες γωνίες είναι ίσες και οι ομόλογες πλευρές είναι ανάλογες. Να αναγνωρίζουν τα κοινά χαρακτηριστικά των όμοιων τριγώνων και να εντοπίζουν τις πιθανές διαφορές τους. Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δυο γωνίες ίσες.	Γνωρίζουν πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια Εντοπίζουν τις ιδιότητες των όμοιων σχημάτων Κάνουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Η ομοιότητα είναι μια οικεία έννοια που συναντούν οι μαθητές στις προβολές, μεγεθύνσεις, σμικρύνσεις κλπ. για το λόγο αυτό μπορούν αρχικά να την αντιληφθούν ολιστικά. Από τις οπτικές συγκρίσεις και τις μετρήσεις είναι δυνατό να οδηγηθούν οι μαθητές στις ιδιότητες της ομοιότητας, δηλαδή τις ισότητες των γωνιών και την αναλογία των πλευρών. Στην ενότητα αυτή επιδιώκουμε την προσέγγιση της έννοιας της ομοιότητας των σχημάτων και της ανάπτυξης των ιδιοτήτων τους.

Δυσκολίες μαθητών

Οι μαθητές δεν δυσκολεύονται να αντιληφθούν τα όμοια σχήματα ολιστικά, και η γενική αυτή αντίληψη μπορεί να τους βοηθήσει να κατανοήσουν τις ιδιότητες και στη συνέχεια να μπορούν να σχεδιάσουν όμοια σχήματα και να πραγματοποιούν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις.

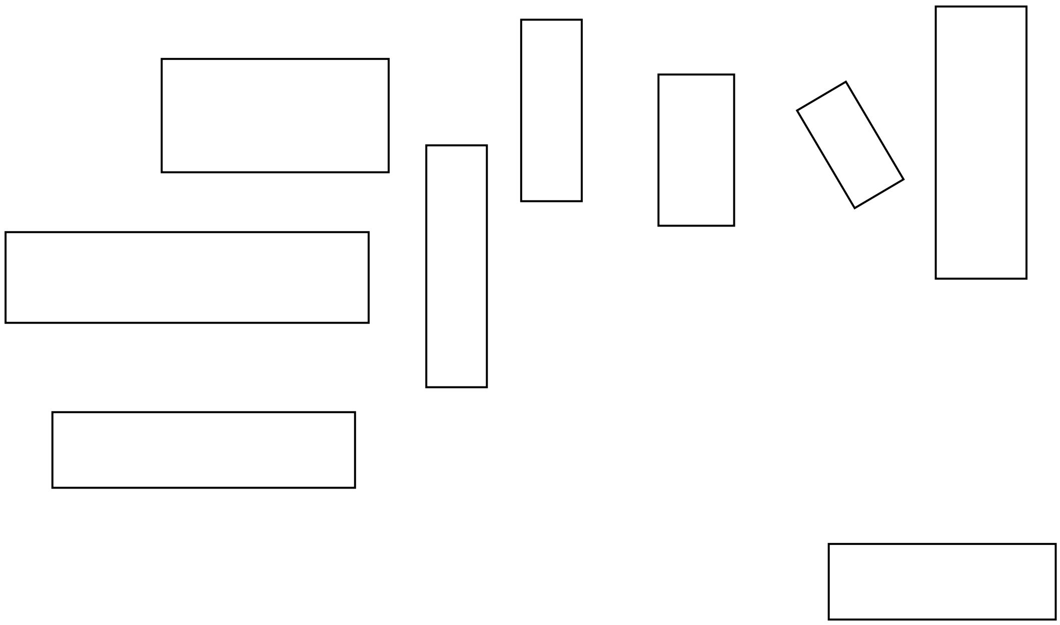
Διδακτικές υποδείξεις

Αρχικά, μέσα από τις δραστηριότητες ομαδοποίησης οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά των όμοιων σχημάτων. Τα τρίγωνα τους βοηθούν να καταλάβουν την ισότητα των γωνιών, ενώ τα ορθογώνια βοηθούν στην προσέγγιση της αναλογίας των πλευρών. Η αντίληψη αυτής της σχέσης αναλογιών είναι απαραίτητη για τις κατασκευές όμοιων σχημάτων.
Η διαισθητική και οπτική αντίληψη μπορεί να στηρίξει την σύγκριση σχημάτων που είναι ή δεν είναι όμοια και μέσα από αυτή να αναδειχθούν οι ιδιότητες

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα $1^{η}$

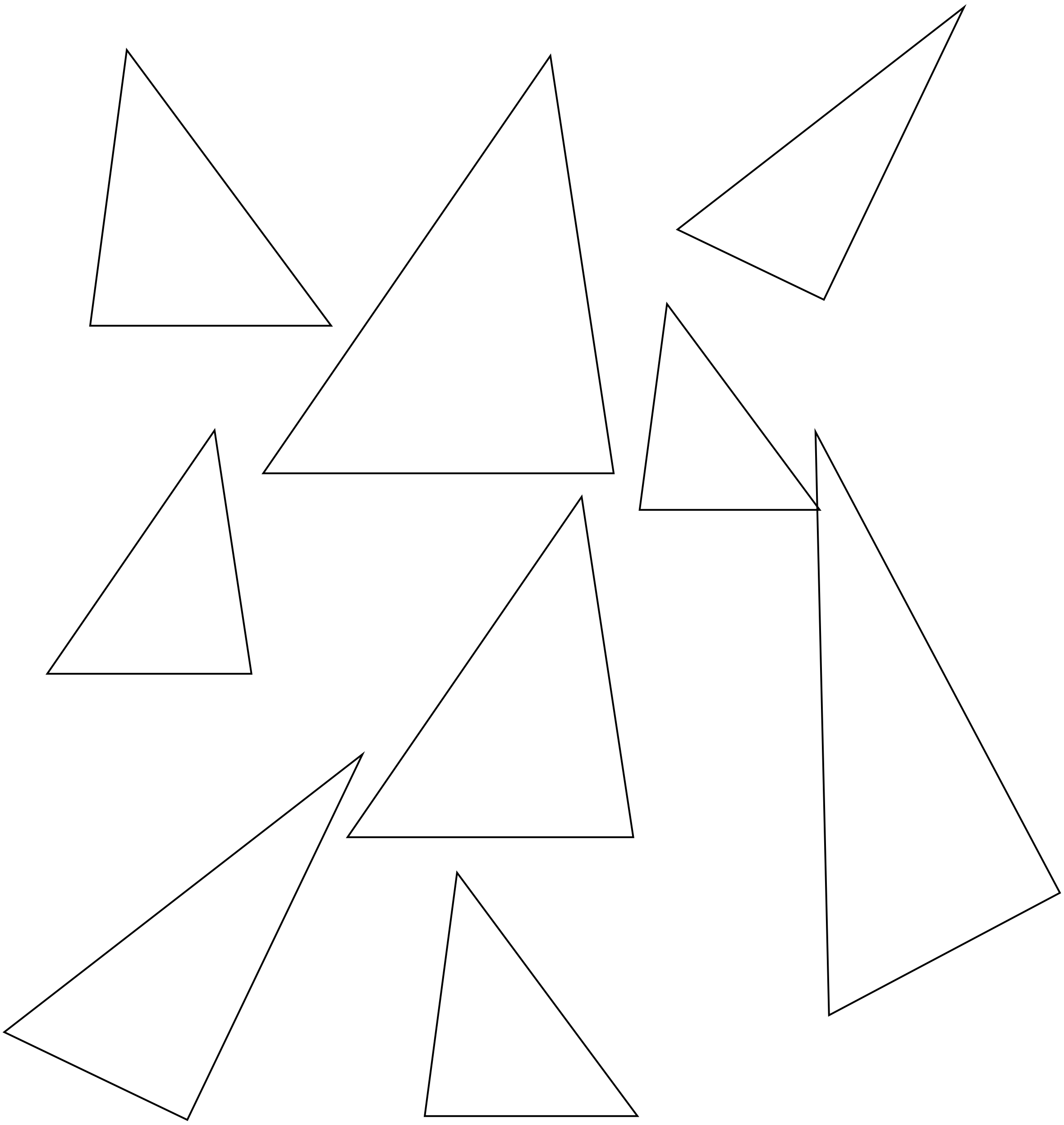
Ομαδοποίησε τα παρακάτω ορθογώνια. Εξήγησε τα κριτήρια που χρησιμοποιείς. Τι κοινά χαρακτηριστικά έχουν τα ορθογώνια μιας ομάδας;



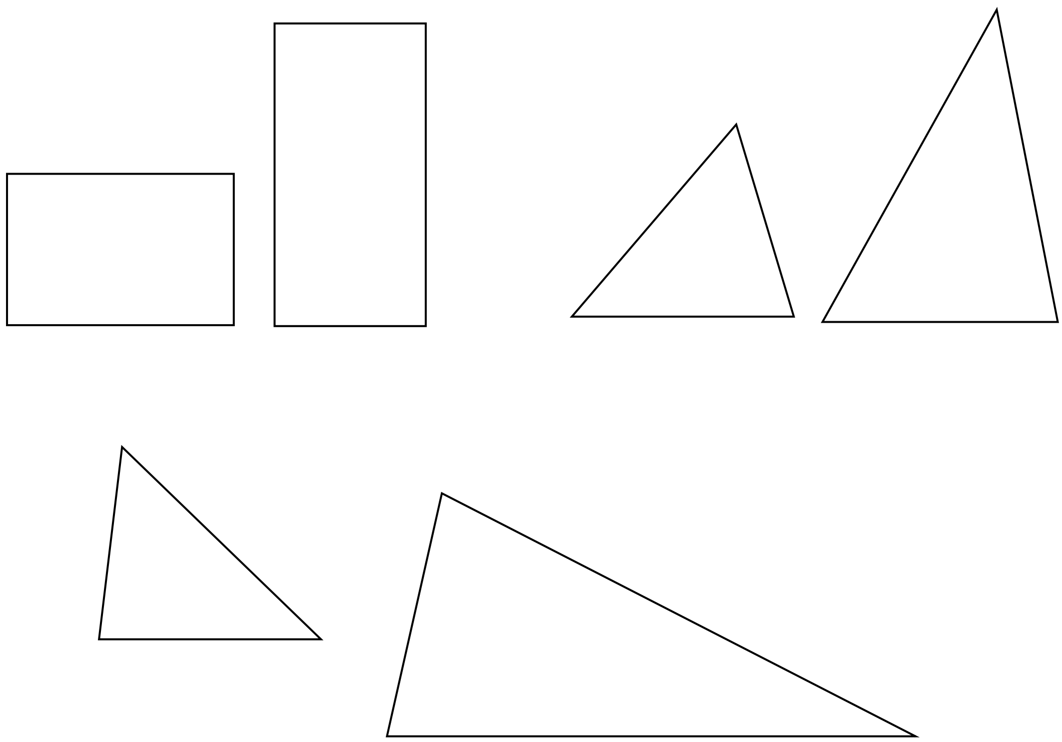
Δραστηριότητα $2^{η}$

Ομαδοποίησε τα παρακάτω τρίγωνα. Εξήγησε τα κριτήρια που χρησιμοποιείς. Τι κοινά χαρακτηριστικά έχουν τα τρίγωνα μιας ομάδας;

Δραστηριότητα 3η

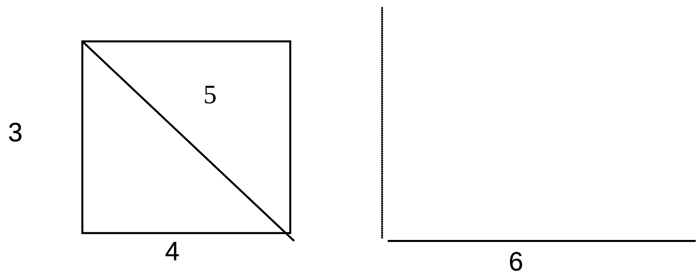


ποια από τα απαρακάτω σχήματα είναι όμοια και ποια όχι;



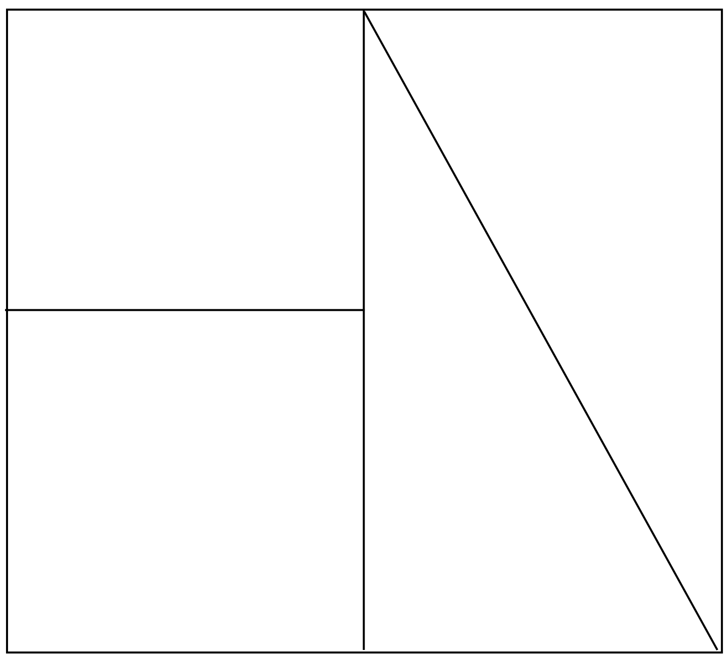
Δραστηριότητα 4η

Να σχεδιάσεις σε μεγέθυνση το παρακάτω σχήμα:



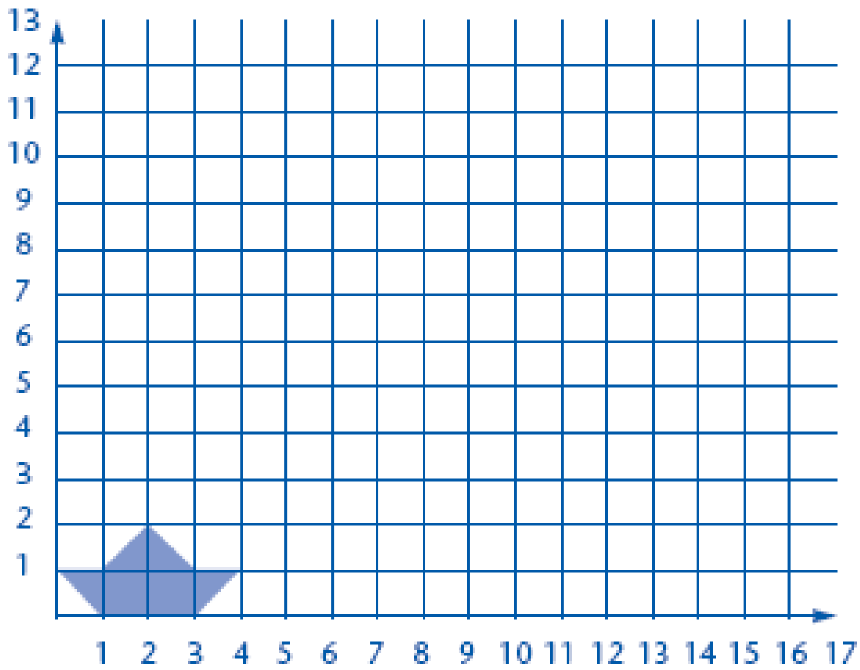
Δραστηριότητα 5η

Κατασκεύασε ένα puzzle, το οποίο έχει διαστάσεις 5 και 4 cm, όπως αυτό που δίνεται στο σχήμα, ώστε να έχει βάση 10 cm.



Δραστηριότητα 5η

Να σχεδιάσεις το καραβάκι μεγέθυνση κατά τρεις φορές.



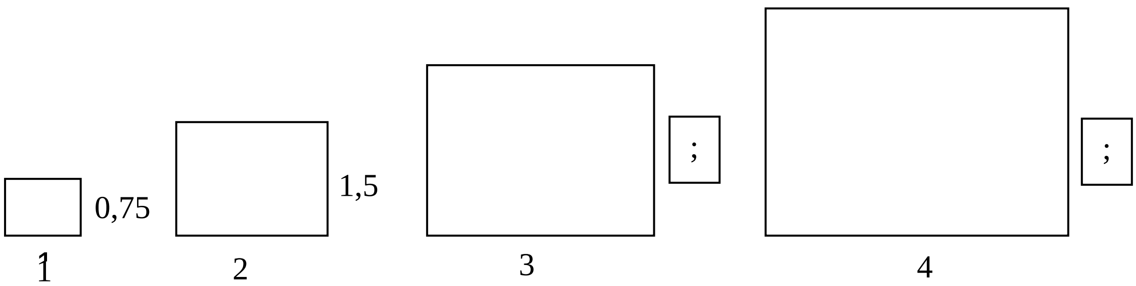
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Πώς διαπιστώνεις ότι δύο σχήματα είναι όμοια;
2. Σημείωσε αν είναι σωστό ή λάθος

- όλα τα τετράγωνα είναι όμοια
- όλα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια
- όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια
- όλα τα ορθογώνια είναι όμοια
- όλα τα κανονικά σχήματα είναι όμοια

Σωστό	Λάθος

3. Συμπλήρωσε τις πλευρές



Βιβλιογραφικές Αναφορές

Μαθησιακές δυσκολίες και Διδασκαλία των Μαθηματικών

Aubrey, C. (1997). *Mathematics Teaching in the Early Years*. London: The Falmer Press

Bley & Thorton, 1995

Bandura, 1986

Brousseau, G. (1996). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dortrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. (1990). Acts of Meaning. Cambridge, MA: Harvard University Press

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1996). Constructivism and Activity Theory: A Consideration of their Similarities and Differences as they relate to Mathematics Education. In H. Mansfield, N.A. Pateman, & N. Bednarz, (Eds.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children* (10-58). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Ernest, P. (1995). *Constructing Mathematical Knowledge*. Dortrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers

Glaserfeld von E. (ed.) *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dortrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991

Nesher, P.& Kilpatrick, J. (eds.) (1990). *Mathematics and Cognition, a Research Synthesis by International Group of PME*, Cambridge: Cambridge University Press

Miller, 1996

Vergnaud, G. (1996). The nature of mathematical concepts. Learning and Teaching Mathematics, An International Perspective. T. B. Nunes, P. UK, Psychology Press Ltd.: 5-28.Nesher & Kilpatrick, 1990, Cobb et al., 1996

Μαρκοβίτης, Μ., Τζουριάδου, Μ. (1991). *Μαθησιακές Δυσκολίες, Θεωρία και Πράξη,* Θεσσαλονίκη. Εκδόσεις Προμηθεύς.

Μπάρμπας, Γ. (2000). *Σχολική υποεπίδοση στα Μαθηματικά και Ενισχυτική Διδασκαλία,* διδακτορική διατριβή, Ιωάννινα.

Μπάρμπας, Γ. (2001). Αντιμετώπιση των σχολικών δυσκολιών στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων: η διαπραγμάτευση του νοήματος και η διδασκαλία αναλυτικών μεθόδων, στα πρακτικά του 5ου πανελλήνιου συνεδρίου «Διδακτική των Μαθηματικών και πληροφορική στην εκπαίδευση» (επιμ. Μ. Τζεκάκη), σελ. 229-234, Θεσσαλονίκη.

Μπάρμπας, Γ., Τζεκάκη Μ. (2005). Καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις σε διαφορετικές χώρες, στα πρακτικά του 1ου συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (Εν. Ε. Δι. Μ.) *«Η διδακτική μαθηματικών ως πεδίο έρευνας στην κοινωνία της γνώσης»* (επιμ. Χ. Κυνηγός) σελ. 219 - 228, Ελληνικά Γράμματα.

Μπάρμπας, Γ. (2007). *Σχολείο και μάθηση. Μια αποκλίνουσα σχέση*. Εκδόσεις Προμηθεύς.

Τζεκάκη, Μ. (2000) (επιμ.). *Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη

Τζουριάδου, Μ. (1995*). Παιδιά με Ειδικές Εκπαιδευτικές Ανάγκες, Μια ψυχο-παιδαγωγική προσέγγιση,* Θεσσαλονίκη. Εκδόσεις Προμηθεύς.

Αριθμοί και πράξεις

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). *Addition and Subtraction; A Cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Eldbaum.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Van de Walle, J.A. (2001). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία.* Αθήνα. Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδανός

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. In in Bishop, A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (Part one). Dortrecht /Boston /London: Kluwer Academic Publishers. pp. 99-138

Ρητοί και Κλάσματα

Kieran, C. (1981). Concepts assosiated with thw equality symbol. Educational Studies of Mathematics, 12, 317326.

Κολεζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books. Mack,1993

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., Peled, I.: 1989 'Conceptualbases of arithmetic errors: The case of decimal fractions', ournal of Research in Mathematics ducation, 20(1), pp.8-27.

Stacey, K., Steinle, V. & Moloney, K. (1998) Students' understanding of decimals. (http://online.edfac.unimelb.edu.au)

Streenfland, L. (1993) The design of a Mathematical Course. A theoretical reflection, *Educational Studies of Mathematics*, 25, pp. 109-135

Thomson, S., & Ch, Walker, V. (1996). Connecting decimals and other mathematical Content. *Teaching Children Mathematics*, *8*(2), pp. 496-502.

Άλγεβρα

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht. Kluwe Academic Publishers

Carpenter, T.P., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalisation and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol 1,pp. 155-162). Melbourne: Australia.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In H. Chick, K. Stacey, J.Vincent and J.Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol 1,pp. 344-352). Melbourne: Australia.

Εξισώσεις – συναρτήσεις

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Kieran, C., Boilean, A., & Garancon, M. (1996). Introducing Algebra by means of a Technology- Supported, functional approach, in Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (eds). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching.* Kluwer A.P.

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. In Nunes T., Bryant P., (eds), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective.* Psychology Press, 133-162.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. in Bishop, A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (Part one). Dortrecht /Boston /London: Kluwer Academic Publishers. pp. 289-326

Τζεκάκη, Μ. Οι δυσκολίες μετασχηματισμού της πρακτικής γνώσης σε μαθηματική έννοια: ένα παράδειγμα από τις συναρτήσεις, στο Φιλίππου, Χρίστου, Κάκας (επιμ.) *Β' Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση*, Λευκωσία: Σύγχρονη Εποχή, 1995

Μετρήσεις

Barrett, J., Jones, G., Thornton, C. and Dickson, S. "Understanding Children's Developing Strategies and Concepts for Length." In Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook, edited by D. Clements and G. Bright, pp. 17-30, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Va.2003.

Battista, M. T., & Clements, D., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematical Education, 29*, 503-532.

Battista, M. (1999) Fifth Graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol 30*, No. 4, 417-448.

Bragg, P. & Outhred, L. (2000). Student's knowledge of length units: Do they know more than rules about rulers? In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2*, 97-104. Hiroshima University.

Clements, D. "Teaching Length Measurement: Research Challenges." School Science and Mathematics 99 pp. 5-11. 1999.

Lehrer, R., Jaslow, L. and Curtis, C. "Developing an Understanding of Measurement in the Elementary Grades." In Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook, edited by D. Clements and G. Bright, pp. 100-121, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Va. 2003.

Outhred, L. and Mitchelmore, M. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Area Measurement. *Journal for Research in Mathematical Education 31* (2000): 144-167

Wilson, P. and Rowland, R. (1992). Teaching Measurement. In P. Jenner, (Ed.), *Research Ideas for the Classroom. Early Childhood Mathematics,* (pp. 171- 191). New York: Macmillan.

Γεωμετρία

Clements, D., Swaminathan, M., Hannibal, M.A., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics education, 30*(2), 192-212.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., Dormolen, J. (1996). Space and Shape in Bishop, A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (Part one). Dortrecht /Boston /London: Kluwer Academic Publishers. pp. 161-204.

Mammana, C. & Villani, V. (1998)*Perspectives on the Teaching of Geometry for 21st Century, an ICMI Study*. Dortrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Τζεκάκη, Μ. Η Γεωμετρική Κατασκευή στη Διδασκαλία της Γεωμετρίας, στο Παπαντωνίου, &. Πόταρη, Δ. (επιμ.) *ΠΡΑΚΤΙΚΑ Πανελλήνιου Συνεδρίου Γεωμετρίας*, Πάτρα, Μάιος 1999, Εκδόσεις Πατάκη, 2001