ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

«Αναλυτικά Προγράμματα Μαθησιακών Δυσκολιών-Ενημέρωση-Ευαισθητοποίηση»

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΕΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

Μ. Τζεκάκη

σε συνεργασία με

Π. Σταγιόπουλο, Γ. Μπαραλό

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΛΛΑΔΑ 2008

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Οι μαθησιακές δυσκολίες αφορούν μια ομάδα πληθυσμού «φυσιολογικής» νοημοσύνης που βασικό της χαρακτηριστικό είναι η ανισομέρεια μεταξύ των γνωστικών λειτουργιών καθώς και ανάμεσα στις γνωστικές λειτουργίες και στη σχολική επίδοση. Σε ό,τι αφορά την επίδοση οι δυσκολίες μπορεί να εμφανιστούν στη γλώσσα, στην ανάγνωση, γραφή καθώς και στα μαθηματικά. Οι δυσκολίες στα μαθηματικά αποτελούν τη λιγότερο μελετημένη μορφή μαθησιακών δυσκολιών, γιατί αφενός δεν εντοπίζονται συχνά αμιγώς περιπτώσεις με δυσκολίες αποκλειστικά στα μαθηματικά και αφετέρου στη μαθηματική επάρκεια υπεισέρχονται ποικίλοι ενδογενείς και εξωγενείς παράγοντες.

Μια περίπτωση μαθησιακών δυσκολιών είναι η ειδική διαταραχή στην *αριθμητική* (dyscalculia). Για τη διαταραχή αυτή μπορούμε να μιλάμε, εφόσον ο μαθητής εντάσσεται στις προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού και εμφανίζει σοβαρά προβλήματα μόνο στο πεδίο των μαθηματικών και όχι πρωτογενώς σε άλλους τομείς της σχολικής μάθησης και ιδιαίτερα σ' αυτόν του προφορικού και γραπτού λόγου. Τα προβλήματα αυτά, επίσης, πρέπει να εντοπίζονται σε συγκεκριμένα πεδία των μαθηματικών (όπως αυτό της μέτρησης ή της έννοιας του αριθμού και του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος ή των υπολογισμών και των πράξεων ή της χρήσης μαθηματικών συμβόλων, κ.α.) και όχι στο σύνολο των σχολικών μαθηματικών, τα οποία περιλαμβάνουν πολλά και διαφορετικού χαρακτήρα πεδία (έννοιες, συλλογισμός, στρατηγικές, οργάνωση, κ.α.) (Μαρκοβίτης, Τζουριάδου, 1991). Προοδευτικά η ειδική αυτή διαταραχή έχει συνήθως επιπτώσεις συνολικά στη μάθηση των μαθηματικών αλλά και ευρύτερα στη σχολική μάθηση. Η ειδική διαταραχή στα μαθηματικά εντοπίζεται κυρίως στις μικρές ηλικίες (πρώτες τάξεις του δημοτικού). Καθώς οι μαθητές περνούν από την παιδική στην εφηβική ηλικία πολλά από τα χαρακτηριστικά της αρχικής συμπτωματολογίας της διαταραχής βαθμιαία υποχωρούν ή ακόμα και εξαφανίζονται. Παραμένουν όμως οι συνέπειές τους και στα τρία επίπεδα: των σχολικών γνώσεων, των στρατηγικών και των μαθησιακών συμπεριφορών και κινήτρων. Πρέπει, ωστόσο να επισημάνουμε, ότι η ειδική διαταραχή στην αριθμητική, διαχωρισμένη από άλλες περιπτώσεις ειδικών διαταραχών, εμφανίζεται με πολύ μικρή συχνότητα και κατά τούτο τα σχετικά ερευνητικά δεδομένα είναι περιορισμένα και συχνά αμφιλεγόμενα. Συχνά τα χαρακτηριστικά αυτής της διαταραχής επικαλύπτονται με άλλα εξωγενή (διδασκαλία, διαμόρφωση προσωπικότητας και κινήτρων) γεγονός που καθιστά τη μελέτη τους ιδιαίτερα σύνθετη και δύσκολη (Lerner, 1993).

Δυσκολίες και εμπόδια στην απόκτηση της σχολικής μαθηματικής γνώσης μπορεί να προέρχονται από άλλες περιπτώσεις ειδικών διαταραχών (μαθησιακών δυσκολιών). Έχει παρατηρηθεί ότι προβλήματα στην οπτικο-κινητική αντίληψη συνδέονται με δυσκολίες στην ικανότητα της μέτρησης, της ταξινόμησης, της σύγκρισης και της «ένα προς ένα» αντιστοίχησης. Οι αντιληπτικές διαταραχές σε ορισμένες περιπτώσεις συνδέονται με δυσκολίες στην κατανόηση των συμβόλων ή με ανεπάρκεια στο συνδυασμό οπτικών και ακουστικών συμβόλων (Johnson, Myklebust, 1967). Διαταραχές στην αντίληψη των σχέσεων στο χώρο συνδέονται με αντίστοιχες έννοιες στα μαθηματικά. Διαταραχές στην ανάπτυξη του λόγου ή της αναγνωστικής ικανότητας συνδέονται με δυσκολίες στην απόκτηση μαθηματικών εννοιών (Kosc, 1974, Lerner, 1993, Rourke 1993). Η αδυναμία γρήγορης και αυτόματης ανάκλησης των αριθμητικών πράξεων καθώς και οι δυσκολίες στον αυτοματισμό βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, σύμφωνα με ορισμένους ερευνητές, συνδέονται με αδυναμίες στις λειτουργίες της μνήμης (Shafrir, Siegel, 1994, Ackerman, Anhalt, Dykman, 1986).

Κοινό και βασικό χαρακτηριστικό όλων των περιπτώσεων των μαθησιακών δυσκολιών είναι η ατελής ή καθόλου ανάπτυξη στρατηγικών στους τομείς όπου εκδηλώνονται οι συγκεκριμένες δυσκολίες μάθησης. Ενώ, δηλαδή, ο μαθητής διαθέτει τις απαιτούμενες νοητικές ικανότητες, δεν αναπτύσσει τις κατάλληλες στρατηγικές που θα επιτρέψουν τη σύνθεση των στοιχείων της προϋπάρχουσας γνώσης από κοινού με τα νέα δεδομένα για την οικοδόμηση της καινούριας γνώσης (Τζουριάδου, 1995). Έτσι, για παράδειγμα, δεν αναπτύσσει αποτελεσματικές στρατηγικές για την αποκωδικοποίηση των γλωσσικών συμβόλων ή για την επεξεργασία των λεκτικών ερεθισμάτων ή για την εννοιολογική συσχέτιση ή για την αυτοματοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών, κ.α. Η απουσία ή η ατελής ανάπτυξη στρατηγικών συνεπάγεται την αδυναμία οικοδόμησης εννοιών, γεγονός το οποίο με τη σειρά του δυσχεραίνει στο επόμενο βήμα ακόμη περισσότερο τη μαθησιακή προσπάθεια του παιδιού. Με δεδομένο τον εξελικτικό και συσσωρευτικό χαρακτήρα της σχολικής μάθησης, οι αδυναμίες στο επίπεδο των μεθόδων επεξεργασίας και στρατηγικών διαμορφώνουν προοδευτικά σημαντικές ελλείψεις και στο επίπεδο των σχολικών γνώσεων. Επιπλέον η συστηματική δυσκολία ή αποτυχία στην ολοκλήρωση των σχολικών εργασιών δημιουργεί αρνητικά συναισθήματα, κίνητρα και απόψεις για τον εαυτό και τη σχολική μάθηση.

Παρόμοια χαρακτηριστικά εμφανίζουν και πολλοί μαθητές με σχολικές δυσκολίες δίχως διαγνωσμένες ανεπάρκειες. Κοινωνικοί, πολιτισμικοί και κυρίως εκπαιδευτικοί παράγοντες ευθύνονται για την αδυναμία πολλών μαθητών να διαθέτουν τις απαιτούμενες από το σχολείο μεθόδους εργασίας και επεξεργασίας των σχολικών έργων, καθώς και στρατηγικές και τρόπους σκέψης. Οι ίδιοι παράγοντες ευθύνονται για την απουσία νοήματος στις διδασκόμενες σχολικές γνώσεις, για τη διαμόρφωση αρνητικών κινήτρων και μαθησιακών συμπεριφορών (Μπάρμπας, 2007).

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε τη διάκριση ανάμεσα στις μεθόδους επεξεργασίας και στρατηγικές αφενός, από τις «τεχνικές» και τα «τεχνάσματα» που έχει συχνά υπόψη του ο εκπαιδευτικός ως βοήθεια για τους μαθητές του. Δίχως να υποβαθμίζεται η αξία αυτών των ειδικών τεχνικών, το κύριο πρόβλημα για τους περισσότερους μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά είναι η αδυναμία τους να επεξεργαστούν μόνοι τους αποτελεσματικά και με λογικό νόημα τα μαθηματικά έργα που αντιμετωπίζουν στο σχολείο. Έτσι για παράδειγμα, η αντιμετώπιση ενός προβλήματος όπως «Ο μαθητής εκτελεί τις πράξεις με το 0 σαν να μην το βλέπει» μπορεί ίσως να συνδέεται με κάποιες ειδικές οπτικο-αντιληπτικές ανεπάρκειες, σίγουρα όμως συνδέεται με εννοιολογικά εμπόδια σχετικά με το 0. Αν το προσεγγίσουμε από αυτή την οπτική γωνία, αντί για τη διδασκαλία «τεχνασμάτων» μπορεί ευκολότερα να υποστηριχθεί ο μαθητής στη κατανόηση του ρόλου του 0 στη γραφή των αριθμών μέσα από τη δημιουργία κατάλληλων συνθηκών που τον βοηθούν να διακρίνει μόνος του αυτό το ρόλο. Αντίστοιχα οι διάφορες κατηγορίες λαθών (Miller, 1996), οφείλονται τόσο στις ιδιαίτερες διαδικασίες σκέψης που χρησιμοποιεί ο κάθε μαθητής (Lorenz,1990), όσο και στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθηματικών εννοιών και εφαρμογών μέσα από τις οποίες θα ήταν άλλωστε εφικτή και η αντιμετώπισή τους.

Οι διαπιστώσεις αυτές μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές με σοβαρές δυσκολίες στα σχολικά μαθηματικά - είτε αυτές συνδέονται με ειδικές διαταραχές (μαθησιακές δυσκολίες) είτε με εξωγενείς παράγοντες - εμφανίζουν παρόμοια χαρακτηριστικά στη διαδικασία της σχολικής μάθησης, τα οποία είναι και τα πιο σημαντικά γι' αυτήν. Αυτό ενισχύει την άποψη ότι ο ορθότερος και αποτελεσματικότερος παιδαγωγικός προσανατολισμός για την αντιμετώπιση των σχολικών δυσκολιών στα μαθηματικά αυτών των μαθητών είναι η κοινή μαθησιακή δραστηριότητα μέσα στην τάξη, με την προϋπόθεση ότι αυτή θα είναι σε θέση να καλύψει τις ανάγκες των μαθητών σχετικά με την ανάπτυξη των δικών τους δυνατοτήτων να επεξεργάζονται και να οικοδομούν τη σχολική γνώση, παράλληλα με τη διαμόρφωση νοήματος και θετικών κινήτρων.

Ο προσανατολισμός αυτός δεν αναιρεί την ανάγκη της επιπλέον ειδικής διδασκαλίας εκτός τάξης στις περιπτώσεις όπου η φύση και η ένταση των μαθησιακών δυσκολιών το απαιτεί. Αυτό μπορεί και πρέπει να προκύπτει από τη συστηματική παιδαγωγική και διεπιστημονική αξιολόγηση του συγκεκριμένου μαθητή. Σε κάθε όμως περίπτωση η συμμετοχή στο κοινό πρόγραμμα της τάξης δεν σχετίζεται με την υλοποίηση κάποιου ειδικού παιδαγωγικού προγράμματος, δεν στοχεύει στην άμεση αντιμετώπιση κάποιας διαταραχής αλλά στην ενίσχυση της προσπάθειας του μαθητή, από κοινού με όλους τους συμμαθητές του, να αποκτήσει την ικανότητα «να μάθει πώς να μαθαίνει», καθώς επίσης και στην ενίσχυση της κοινής συλλογικής ταυτότητας του μέλους της σχολικής ομάδας. Αυτές είναι ανάγκες πρώτης προτεραιότητας και μόνο η συμμετοχή στην κοινή μαθησιακή δραστηριότητα της τάξης, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, μπορεί να τις ικανοποιήσει.

Για όλους τους λόγους που αναλύθηκαν, στο συγκεκριμένο βοήθημα ακολουθούμε μια κατεύθυνση, στην οποία συγκλίνουν πολλές σύγχρονες απόψεις για τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες Δεν δοκιμάζουμε να «διδάξουμε» Μαθηματικά με διαφορετικούς τρόπους ή με τη χρήση διαφόρων τεχνασμάτων, αλλά συστηματοποιούμε δραστηριότητες και διδακτικές καταστάσεις που παίρνοντας υπόψη τις ειδικές δυσκολίες των παιδιών όπως και τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες τους επιτρέπουν με αυτενέργεια να ξεπεράσουν τα ελλείμματα τους στη μαθηματική μάθηση. Με τον τρόπο αυτό, εκτός από τις σχολικές του σπουδές, θα αναπτύξουν δεξιότητες που θα τους επιτρέψουν, να γνωρίσουν, να αντιμετωπίσουν, να ερμηνεύσουν, να κατανοήσουν, να ελέγξουν καταστάσεις και να λειτουργήσουν με αποτελεσματικό τρόπο την καθημερινή τους ζωή (Τζεκάκη, 2000, Μπάρμπας 2001, Μπάρμπας, 2007).

Με άλλα λόγια προσαρμόζουμε τους στόχους και το υλικό του προγράμματος με βάση:

- Τα *ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των παιδιών* που αντιμετωπίζουμε, τα οποία μας δίνουν τις ειδικές δυσκολίες και κριτήρια για την επιλογή του υλικού που θα επιλεγεί για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών που μας ενδιαφέρει.
- Τα ίδια *τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών εννοιών*, τις ιδιαιτερότητες τους, τις συνθήκες ανάπτυξής τους, το εννοιολογικό πλαίσιο αναφοράς, τα οποία μας δίνουν τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες αυτές.

Συγκεκριμένα, κατά θεματική ενότητα εντοπίζονται τα ελλείμματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στις ιδιαίτερες έννοιες και τις διαδικασίες που εμπλέκονται, δηλαδή τα σημεία από τα οποία ξεκινούν τα μαθησιακά του ελλείμματα. Στη συνέχεια, αναλύονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των εννοιών και με αφετηρία αυτά προτείνονται οι κατάλληλες δραστηριότητες μέσα από τις οποίες οι μαθητές θα οικοδομήσουν το νόημα που έχουν οι σχετικές έννοιες ή διαδικασίες. Για το κάθε ένα από τα μαθησιακά ελλείμματα, υποδεικνύονται δραστηριότητες και υλικό που μπορούν να στηρίξουν το ξεπέρασμά τους (Τζουριάδου, 1995).

Με την έννοια αυτή, η Προσαρμογή του Προγράμματος αφορά μία πιο συστηματική ανάλυση στόχων σε επίπεδα που προσδιορίζουν οι μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και ενδιαφερόμαστε να αναπτύξουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

Διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών: νέες διδακτικές προσεγγίσεις

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα υψηλό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου με πολλές ιδιαιτερότητες συγκριτικά με άλλες γνώσεις που αναπτύσσουν τα παιδιά. Ως η πιο σημαντική από τις ιδιαιτερότητες αυτές μπορεί να θεωρηθεί η δημιουργία και η ενασχόληση της μαθηματικής επιστήμης με νοερά αντικείμενα. Οι μαθηματικές έννοιες είναι απόλυτα αφηρημένες, ιδεατές οντότητες (ως ιδέες και ως ιδεώδη) οι οποίες παίρνουν τη σημασία τους από τους ορισμούς τους στο εσωτερικό της επιστήμης.

Για το λόγο αυτό οι συνθήκες ανάπτυξής τους στην αντίληψη των μαθητών είναι πολύπλοκες και οι περισσότεροι μαθητές συναντούν σοβαρές δυσκολίες στην κατανόηση και τη διαχείρισή τους.

Ωστόσο οι μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες εμπλέκονται σε όλες τις καθημερινές δραστηριότητες των ανθρώπων και είναι απόλυτα απαραίτητες για τη λειτουργία τους μέσα στην κόσμο. Για το λόγο άλλωστε αυτό, είναι απαραίτητο να βοηθήσουμε τα παιδιά να αναπτύξουν ορισμένες από αυτές τις έννοιες και διαδικασίες.

Τα τελευταία χρόνια διαμορφώνεται μια κοινή αντίληψη για τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών, μέσα από την οποία οι μαθητές κατακτούν το *νόημα* των Μαθηματικών.

Ο μαθητής δεν αντιμετωπίζεται πλέον ως αποδέκτης μαθηματικών πληροφοριών που του προσφέρονται από τον διδάσκοντα με τη μορφή αφήγησης ή ερωταπόκρισης αλλά κατασκευάζει δυναμικά τη γνώση. Με τον τρόπο αυτό, καλείται να διαμορφώσει μια δική του μαθηματική συμπεριφορά μέσα από την οργάνωση της προσωπικής δραστηριοποίησης και των εμπειριών του. Η *θεωρία οικοδόμησης της γνώσης* είναι η γνωστική θεωρία που συνεισφέρει προς την κατεύθυνση αυτή (von Glaserfeld, 1991, Ernest, 1995).

Την ίδια όμως στιγμή διατυπώνονται ερωτήματα και αναπτύσσονται ερευνητικοί προβληματισμοί για το περιεχόμενο και την οργάνωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων με τρόπο ώστε να συνδέουν τις άτυπες με τις τυπικές έννοιες και διαδικασίες. Είναι γενικά αποδεκτό ότι η δημιουργία μιας μαθηματικής γνώσης απαιτεί κατάλληλα διαμορφωμένες διδακτικές καταστάσεις, οι οποίες σχεδιάζονται ειδικά για κάθε έννοια (βλ. σχετικά *θεωρία των διδακτικών καταστάσεων,* Brousseau,. 1996). Άλλωστε, για την ανάπτυξη κάθε μαθηματικής έννοιας και ανάλογα με το επίπεδο και την ηλικία των μαθητών, απαιτείται η δημιουργία δραστηριοτήτων και προβλημάτων που να προκαλούν στους μαθητές την κατασκευή της συγκεκριμένης κάθε φορά γνώσης.

Την άποψη αυτή συμπληρώνει η έννοια του εννοιολογικού πεδίου, στη βάση της οποίας μια μαθηματική γνώση δεν μπορεί να οικοδομηθεί μέσα από μία ή μερικές δραστηριότητες αλλά μέσα από ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων στα οποία η έννοια λειτουργεί και παίρνει το νόημά της (Vergnaud, 1996). Πάνω στα θέματα αυτά η επιστημονική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών μελετά επί χρόνια παραδείγματα και εφαρμογές.

Οι σύγχρονες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση στηρίζονται ιδιαίτερα σε μια επικοδομιστική υπόθεση σύμφωνα με την οποία το ίδιο το υποκείμενο κατασκευάζει δυναμικά τη γνώση, οργανώνοντας το δικό του εμπειρικό κόσμο. Κατά συνέπεια και η μαθηματική μάθηση απαιτεί την εμπλοκή του μαθητή και την ανάπτυξή του μέσα σε ένα κατάλληλο οργανωμένο *περιβάλλον μαθηματικής εμπειρίας* (Nesher & Kilpatrick, 1990, Cobb et al., 1996) το οποίο αποτελεί ένα σύνολο από υλικές και νοητικές προϋποθέσεις (ειδικά σχεδιασμένες για κάθε έννοια) που δημιουργούν τις απαραίτητες συνθήκες για την προσέγγιση των εννοιών που επιδιώκουμε. Δρώντας μέσα σε αυτό το περιβάλλον ο μαθητής *έχει την ευκαιρία* να εμπλακεί με δραστηριότητες που τον φέρνουν σε επαφή με μαθηματικές γνώσεις, διαδικασίες και ικανότητες (Cobb et al., 1996, Aubrey, 1997).

Για το λόγο αυτό, τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών προσανατολίζονται σε μία διδακτική μεθοδολογία που στηρίζεται στις δραστηριότητες.

Τι είναι όμως μία μαθηματική δραστηριότητα;

Δραστηριότητα είναι μια κατάσταση κατά την οποία το άτομο καλείται να δράσει, να αποφασίσει να επιλέξει, να κατασκευάσει, κλπ. Για τη δράση αυτή κινητοποιεί την προηγούμενη γνώση, η οποία αν δεν είναι επαρκής, το άτομο την επανεξετάζει, την επανοργανώνει ή την διευρύνει (Nesher & Kilpatrick, 1990, Cobb et al., 1996).

Το πρώτο λοιπόν από τα χαρακτηριστικά μιας μαθηματικής δραστηριότητας είναι η *δράση*. Δράση σημαίνει εύρεση λύσης σε ένα πρόβλημα, στρατηγικών σε ένα παιχνίδι, κατασκευή, απόφαση κλπ. και προϋποθέτει τη χρήση καταστάσεων, παιχνιδιών, υλικού που συνδέονται με την έννοια που θέλουμε να αναπτύξουμε και προτρέπουν το παιδί να συμμετέχει, να σκεφθεί και να ασχοληθεί με τη σχετική έννοια. Προϋποθέτει δηλαδή την ατομική, νοητική δραστηριοποίηση του**.** Αν ο μαθητής "εμπλακεί" ουσιαστικά σε μια φάση της διδακτικής κατάστασης που προτείνουμε, τότε λειτουργεί όπως ο ίδιος αντιλαμβάνεται και πολλές φορές ανεξάρτητα από το τι θα ήθελε ή τι θα περίμενε ο διδάσκων από αυτόν. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο παρατηρεί, επιλέγει, αποφασίζει, παράλληλα όμως εκφράζει με λόγια ή άλλα αναπαραστατικά μέσα, διατυπώνει αυτό που κάνει, αναπτύσσει στρατηγικές που το βοηθούν, όπως άλλωστε επιβεβαιώνει τη δράση του ή την απόφασή του, διορθώνει σε περιπτώσεις λάθους.

Είναι γνωστό ότι η ίδια η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών από τον άνθρωπο στηρίχθηκε στην αναγκαιότητα αντιμετώπισης καταστάσεων και προβλημάτων για την ερμηνεία, την κατανόηση και τον έλεγχο του κόσμου που μας περιβάλλει. Με τον ίδιο τρόπο επιδιώκουμε να αναπτύξουμε ανάμεσα στους μαθητές και τις μαθηματικές έννοιες μια σχέση ανάπτυξης και χρήσης εννοιών και διαδικασιών που του επιτρέπουν με αποτελεσματικό τρόπο να γνωρίσει, να αντιμετωπίσει τις καταστάσεις και τα προβλήματα που συναντά.

Για το λόγο αυτό είναι σημαντική η έννοια των κινήτρων και της αναγκαιότητας ανάπτυξης μιας γνώσης που οδηγούν τα παιδιά να ασχοληθούν με μια προτεινόμενη δραστηριότητα, να συμφωνήσουν με τη χρησιμότητα στη γνώση που απαιτείται και να είναι πρόθυμοι να επενδύσουν χρόνο και προσπάθεια για να την αποκτήσουν. Εκτός από την ίδια τη γνώση, μια τέτοια διαδικασία ενισχύει τις αντιλήψεις των παιδιών για την *αυτό-αποτελεσματικότητά* τους[1] (self efficacy) καθώς και για την αξία της μάθησης.

Μια δραστηριότητα που είναι προσανατολισμένη προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μιας νέας γνώσης είναι απαραίτητο να οδηγεί τα παιδιά σε μια κατάσταση *προβληματισμού*. Το στοιχείο αυτό θα πρέπει να εξασφαλίζεται τόσο με το θέμα που βάζει προς διαπραγμάτευση (στο επίπεδο και στον τρόπο σκέψης του παιδιού) όσο και με το πλαίσιο στο οποίο είναι οργανωμένη η δραστηριότητα (θέμα, σενάριο και υλικό) ώστε να ενθαρρύνει την εμπλοκή του παιδιού.

Στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας. η *διατύπωση με λόγια* της δράσης της απόφασης ή της επιλογής είναι σημαντική γιατί οδηγούν τους μαθητές να εκφράσουν ρητά αυτά που έχουν κάνει και κατά συνέπεια να αποκτήσουν συνείδηση των εννοιών με τις οποίες έρχονται σε επαφή. Η μεταφορά των εννοιών από το επίπεδο της δράσης στο επίπεδο των λέξεων αποτελεί κλειδί για την προσέγγισή τους.

---

[1] *Η αυτό-αποτελεσματικότητά ορίζεται ως η πίστη του ατόμου στις ικανότητές του να οργανώσει και να εκτελέσει τις απαιτούμενες ενέργειες προκειμένου να φέρει σε πέρας επιτυχώς ένα γνωστικό έργο (Bandura, 1986).*

Σύμφωνα με τον Bruner (1990) «*η γλώσσα δεν αναπτύσσεται μέσα από το ρόλο του ακροατή, αλλά μέσα από τη χρήση της. Το να εκτεθεί κανείς στη ροή της γλώσσας δεν είναι τόσο σημαντικό όσο το να την χρησιμοποιήσει μέσα στην πράξη*». Το παιδί πρέπει να ενθαρρύνεται να εκφράζει τις ιδέες του, να τις συνδέει, να ρωτάει και να δίνει απαντήσεις, να ακούει και να ακολουθεί οδηγίες, να συζητά, να ερμηνεύει και να επεξηγεί, να κρίνει, να εικάζει, να εκτιμά.

Ο έλεγχος στο αποτέλεσμα μιας απόφασης ή μίας δράσης είναι επίσης απαραίτητος για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας. Η διόρθωση του λάθους όμως δεν μπορεί να γίνει από το δάσκαλο, γιατί όπως η δημιουργία της λανθασμένης γνώσης πραγματοποιείται από το ίδιο το υποκείμενο-παιδί, έτσι και η διόρθωση της θα πραγματοποιηθεί από αυτό. Δεδομένου μάλιστα ότι το λάθος ή η ελλιπής γνώση ήταν αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης διαδικασίας επαφής με το περιβάλλον, γιατί πάντα η ανάπτυξη γνώσεων χρειάζεται μια μακρόχρονη διαδικασία, μια φράση ή μια διόρθωση του δασκάλου δεν είναι αρκετή για να την αλλάξει.

Όλα τα παραπάνω δείχνουν ότι κάθε διδακτική κατάσταση πρέπει να περιλαμβάνει μια δυναμική διαδικασία ελέγχου που να επιτρέπει στο παιδί να εντοπίζει το λάθος του για να οδηγηθεί στη διόρθωση και στη νέα γνώση. Παράλληλα να το βοηθάει να αξιολογεί τις γνωστικές στρατηγικές και να αναπτύσσει μεταγνωστικές στρατηγικές στην πορεία αντιμετώπισης καταστάσεων.

Η οργάνωση και διαχείριση αποτελούν τη μία διάσταση μιας μαθηματικής δραστηριότητας. Η δεύτερη διάσταση δίνεται από τη σύνδεση του έργου που προτείνουμε με το μαθηματικό νόημα που επιδιώκουμε να αναπτυχθεί. Γνωρίζοντας ποιο είναι το πλαίσιο των εννοιών που ενδιαφερόμαστε να αναπτύξουμε και το επίπεδο προσέγγισης που αποφασίζουμε να φτάσουμε, καταλήγουμε σε ένα σύνολο από δραστηριότητες που είναι αναγκαίες για αυτό το πλαίσιο εννοιών και αυτό το επίπεδο προσέγγισης. Συχνά εμφανίζεται το λάθος να προτείνουμε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες που το παιδί αντιμετωπίζει χωρίς όμως να οδηγείται στην ανάπτυξη μιας πιο γενικής ιδέας, όπως είναι συνήθως οι μαθηματικές ιδέες ή να θεωρείται ότι το παιδί όταν ασχολείται με μία εφαρμογή μπορεί να κάνει μια γενίκευση που μπορεί να προέλθει μόνο από ένα σύνολο εφαρμογών. Για παράδειγμα, για την κατανόηση του κλάσματος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο εφαρμογές μοιρασιάς σε μέρη, που δίνουν μια διάσταση της έννοιας, αλλά και λόγου, μοιράσματος κλπ. όπως και να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές παραστάσεις για αυτό όπως οι σχηματικές, οι γραμμικές ή οι παραστάσεις συνόλων.

Συνοπτικά η διδασκαλία με δραστηριότητες προτείνει τον σχεδιασμό και την υποβολή στους μαθητές μιας διδακτικής κατάστασης που είναι πρόβλημα, δηλαδή μια άγνωστη κατάσταση για τα παιδιά και η αντιμετώπισή της αναπτύσσει μια νέα ιδέα, που συνδέεται με τα μαθηματικά.

Τα παιδιά την αναλαμβάνουν και μπορούν να τη διαχειριστούν, λειτουργώντας χωρίς παρέμβαση, έχουν τρόπους να διαπιστώσουν τα σωστά ή τα λάθη τους και βγάζουν κάποιο γενικότερο συμπέρασμα.

Ο εκπαιδευτικός καλείται να βρει δραστηριότητες σε αντιστοιχία με τις έννοιες, να οργανώσει τα κατάλληλα υλικά, τις μορφές αναπαράστασης και τις διαδικασίες ελέγχου και να ενθαρρύνει τη δραστηριοποίηση του παιδιού, τη διατύπωση των ιδεών του και τους ελέγχους, χωρίς να παρεμβαίνει στη δράση του.

Διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών: προσεγγίσεις για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες

Με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω γίνεται φανερό ότι η διδακτική μεθοδολογία που προτείνεται για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δεν διαφοροποιείται από τη μεθοδολογία που προτείνεται για τη μαθηματική μάθηση σε όλα τα παιδιά. Οι δυσκολίες στα Μαθηματικά προέρχονται από την αφηρημένη τους μορφή, την αναγκαιότητα γενικεύσεων, την ιδιαιτερότητα της γλώσσας τους, στις διαφορές των εννοιών ανάμεσα στον τρόπο που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή, την χρήση συμβολικών και αναπαραστατικών σχημάτων, κι αυτές οι δυσκολίες διαφοροποιούνται κατά έννοια και θεματική περιοχή. Περισσότερο από να διαγνώσουμε προβλήματα και να συζητήσουμε ιδιαίτερους τρόπους αντιμετώπισής τους είναι ενδιαφέρον να εντοπίσουμε τις ειδικές δυσκολίες κατά θεματικό μαθηματικό άξονα και να προτείνουμε μεθόδους και δραστηριότητες που μπορούν να βοηθήσουν στο ξεπέρασμά τους.

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση είναι αυξημένα λόγω του "αθροιστικού" χαρακτήρα των γνώσεων. Αποτέλεσμα αυτής της υστέρησης συγκριτικά με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους, είναι η μεγάλη δυσκολία επίτευξης των στόχων του Προγράμματος Σπουδών.

Το βοήθημα αυτό, σε επίπεδο στόχων, περιορίζει τα ζητούμενα στις βασικές μαθηματικές διαδικασίες και έννοιες που είναι απαραίτητες για την ολοκλήρωση των σπουδών του Γυμνασίου.

Πιο συγκεκριμένα η προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

- εντοπίζει τα ελλείμματα στη μαθηματική μάθηση σε κάθε θεματική ενότητα των μαθηματικών και
- προτείνει ενδεικτικές δραστηριότητες και διδακτικές καταστάσεις που βοηθούν τα παιδιά να ξεπεράσουν τα ελλείμματα αυτά.

Έτσι στο βοήθημα αυτό, κατά θεματική περιοχή παρουσιάζονται:

1. Η *διαδοχή των στόχων και η προσαρμογή* τους για παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες (προηγούμενες τάξεις – παρούσα τάξη – προσαρμογή) σε ένα φύλλο προγραμματισμού, με βάση τα ελλείμματα στη μαθηματική μάθηση που εντοπίζονται σε κάθε θεματική ενότητα των μαθηματικών. Οι μαθηματικές έννοιες δομούνται με ιεραρχικό τρόπο και στηρίζονται σε προηγούμενες γνώσεις. Αρκετές αριθμητικές και γεωμετρικές έννοιες έχουν αναπτυχθεί ήδη στα παιδιά σε προηγούμενες τάξεις όπως και στο δημοτικό. Μια κατάλληλη μαθηματική εκπαίδευση αξιοποιεί τις προηγούμενες γνώσεις των παιδιών, στηρίζεται στις εμπειρίες τους, ασκεί τα παιδιά σε γενικεύσεις και αφαιρέσεις οι οποίες θα τα οδηγήσουν βαθμιαία σε μια πιο συστηματική γνώση. Για το λόγο αυτό στην παρουσίαση των στόχων παρουσιάζονται οι γνώσεις που είναι απαραίτητες για την αντιμετώπιση των στόχων της συγκεκριμένης θεματικής ενότητας και επιτρέπουν στον εκπαιδευτικό, είτε να στηριχθεί σε αυτές, είτε να επιδιώξει να τις καλύψει, αν εντοπίσει κενά, μέσα από τις κατάλληλες δραστηριότητες.

2. Οι *ιδιαιτερότητες των εννοιών,* δηλαδή μία αποσαφήνιση σημαντικών στοιχείων που αφορούν στις έννοιες που μας απασχολούν, με βάση τις αναλύσεις και τα ερευνητικά ευρήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης για την πορεία ανάπτυξης των σχετικών εννοιών.

3. Επισημάνσεις στις *δυσκολίες* που είναι δυνατό να συναντήσουν οι μαθητές (δυσκολίες των μαθητών), με βάση τις γενικότερες δυσκολίες που συναντάμε στην πορεία ανάπτυξης των σχετικών εννοιών, που μας βοηθούν να κατανοήσουμε τα ελλείμματα, όσο και τις προτεινόμενες δραστηριότητες.

4. *Διδακτικές υποδείξεις* που δίνουν στον εκπαιδευτικό κριτήρια επιλογής ή διαμόρφωσης δραστηριοτήτων

5.Ενδεικτικές δραστηριότητες κατά περίπτωση δυσκολίας.

6. *Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση*

Κάθε θεματική ενότητα ολοκληρώνεται με τις ερωτήσεις αυτές που συνοψίζουν τα σημαντικότερα στοιχεία της ενότητας και επιτρέπουν στον ίδιο το μαθητή να αξιολογήσει τις γνώσεις και τις δεξιότητες που έχει αποκτήσει, και στον εκπαιδευτικό να αξιολογήσει την επίτευξη των στόχων.

Με τη μορφή αυτή η αξιολόγηση αποκτά επίσης ένα *συνδιαμορφωτικό* χαρακτήρα που επιτρέπει την από κοινού με το μαθητή αντιμετώπιση των δυσκολιών και την ανάληψη ευθύνης ανάπτυξης γνώσης από το ίδιο το παιδί.

Η εξελικτική φύση των Μαθηματικών, σε αντίθεση με άλλα μαθήματα τα οποία παρουσιάζουν σχετική ανεξαρτησία των γνώσεων (π.χ. φυσικές επιστήμες), δεν “επιτρέπει” την ύπαρξη κενών, τα οποία μπορεί να δημιουργήσουν σημαντική δυσκολία στη μάθηση. Η διαδοχή αυτή κάνει απαραίτητη την διάταξη των προσαρμογών του προγράμματος κατά θεματικό άξονα και τάξη.

Οργάνωση της τάξης με παιδιά με σχολικές και μαθησιακές δυσκολίες

Οι προτεινόμενες προσαρμογές για τους μαθητές με σχολικές και μαθησιακές δυσκολίες δεν πρέπει να περιορίζονται στο πρόγραμμα και για να επωφεληθούν οι μαθητές αυτοί από την εκπαίδευσή τους στη συνηθισμένη τάξη, είναι απαραίτητο να οργανωθούν διδακτικές πρακτικές που παίρνουν υπόψη τους τις ειδικές εκπαιδευτικές τους ανάγκες.

Η φυσική παρουσία ενός ή περισσοτέρων μαθητών με σχολικές - μαθησιακές δυσκολίες μέσα σε μια σχολική τάξη, δεν σημαίνει και την άμεση συμμετοχή τους στις μαθησιακές δραστηριότητες, ειδικά όταν υπάρχει απόσταση ανάμεσα στις γνώσεις τους και στις απαιτήσεις των προς επίλυση μαθηματικών έργων. Αυτό που καθορίζει τις απαιτήσεις των μαθηματικών έργων σε κάθε τάξη είναι ένα σύνολο από προαπαιτούμενες γνώσεις τις οποίες πρέπει να κατέχει ο μαθητής για να μπορέσει να ανταποκριθεί στις αντίστοιχες απαιτήσεις των μαθηματικών έργων. Όσοι μαθητές έχουν ελλείψεις-κενά στις γνώσεις τους μπορούν να τα καλύψουν μέσω του θεσμού της ενισχυτικής διδασκαλίας (Π.Δ. 429 και 462 / 1991). Στις περιπτώσεις που οι ελλείψεις συνδέονται με ανεπάρκειες, οι μαθητές παραπέμπονται να παρακολουθήσουν το μάθημα των Μαθηματικών στο τμήμα ένταξης με στόχο την αντιμετώπιση των ανεπαρκειών τους μέσω ενός εξειδικευμένου προγράμματος (Ν. 2817 / 2000). Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές αποκλείονται από την τάξη τους και παραπέμπονται σε ειδικές δομές εκπαίδευσης διαχωρισμένες από τον κύριο κορμό της εκπαίδευσης. Η φιλοσοφία αυτή μεταθέτει στον ίδιο το μαθητή την ευθύνη για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει, τη στιγμή που αυτές προκύπτουν κυρίως από την ίδια τη δομή και την οργάνωση του μαθησιακού προγράμματος. Για το λόγο αυτό υποστηρίζεται σήμερα ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες πρέπει να συμμετέχουν και να αντιμετωπίζουν τα προβλήματά τους περισσότερο μέσα στην κανονική τάξη και λιγότερο σε ειδικές δομές (Τζουριάδου, 1995).

Ωστόσο η παρουσία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες μέσα σε μία τάξη γυμνασίου δεν συνεπάγεται αυτόματα και την εμπλοκή τους στις μαθησιακές δραστηριότητες. Οι μαθητές αυτοί μπορεί να είναι ενσωματωμένοι μέσα στην τάξη χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μπορούν να παρακολουθήσουν το μαθησιακό πρόγραμμα. Στόχος των διδακτικών πρακτικών θα πρέπει να είναι να μπορούν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες να συμμετέχουν ουσιαστικά μαζί με υπόλοιπους συμμαθητές τους.

Σε μία τάξη που λειτουργεί ήδη με σύγχρονη μορφή διδασκαλίας, η αποτελεσματική διαχείριση της ώστε να επιτρέπει τη ενεργητική συμμετοχή των μαθητών με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες, προϋποθέτει:

- την εστίαση του ενδιαφέροντος σε όλη την τάξη,
- τον έλεγχο όλων των παραγόντων που επιδρούν στη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης,
- την εφαρμογή συνεργατικών μεθόδων διδασκαλίας και μάθησης και ανάδειξης στρατηγικών,
- τη δημιουργία ενός περιβάλλοντος τάξης, που προσαρμόζεται στην ομάδα και είναι υποστηρικτικό για όλους.

Για τη λειτουργία αυτή, κάποιες τεχνικές μπορεί να είναι:

- Ο προγραμματισμός της τάξης ως ενιαίο σύνολο και η ενθάρρυνση της ενεργητικής συνεργατικής μάθησης.
- Η οργάνωση της τάξης σε ομάδες με ανάμεικτες ικανότητες που επιτρέπει την κατανομή των απαντήσεων σε κάθε δραστηριότητα, έτσι ώστε ένα μέρος από αυτές τις ερωτήσεις να μπορούν να αντιμετωπιστούν από όλα τα παιδιά.
- Η χρήση εναλλακτικών δραστηριοτήτων, η ανάπτυξη και αξιοποίηση ενός πλούσιου διδακτικού περιβάλλοντος με ποικιλία διδακτικών μέσων και υλικών, όπως είναι το εκπαιδευτικό υλικό, τα παιχνίδια, οι κατασκευές κλπ, όπως και η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών και των μαθηματικών λογισμικών.

Οργάνωση της δράσης των μαθητών σε μια μαθηματική δραστηριότητα

Με βάση τα παραπάνω προτείνεται η παρακάτω οργάνωση του μαθήματος. Οι μαθητές οργανώνονται σε μικρές ομάδες μεικτής ικανότητας των τεσσάρων ή το πολύ πέντε ατόμων. Η κάθε δραστηριότητα αναπτύσσεται σε τρεις φάσεις.

α) Στην πρώτη κάθε μαθητής ασχολείται ατομικά με το πρόβλημα που θέτει η δραστηριότητα. Ο τρόπος δράσης δεν προκαθορίζεται από τον εκπαιδευτικό αλλά επιλέγεται από τον μαθητή. Άλλος μπορεί να επεξεργάζεται εμπειρικά το πρόβλημα, στο εικονικό επίπεδο (με σχέδιο ή ζωγραφιά) και άλλος μπορεί να το επεξεργάζεται στο αφαιρετικό με τη χρήση μαθηματικών κανόνων ή αλγορίθμων. Ο εκπαιδευτικός ανάλογα με τη δραστηριότητα καθορίζει το χρόνο αυτής της φάσης. Παρακολουθεί την προσπάθεια του κάθε παιδιού και παρεμβαίνει για να διευκολύνει την επεξεργασία των εμποδίων που συναντά. Η διευκόλυνση αφορά κυρίως στην έμμεση ή άμεση υπόδειξη μεθόδων επεξεργασίας του προβλήματος. Ο έμμεσος ή άμεσος χαρακτήρας των υποδείξεων εξαρτάται από τον κάθε μαθητή και την ποιότητα των εμποδίων που εμφανίζει. Σε καμία περίπτωση ο εκπαιδευτικός δεν υποδεικνύει τη λύση ούτε επικυρώνει την ορθότητα ή μη των ενεργειών των μαθητών. Αντίθετα υποδεικνύει τρόπους ελέγχου από τους ίδιους τους μαθητές της λογικής ορθότητας των ενεργειών τους.

β) Στη δεύτερη φάση οι μαθητές της κάθε ομάδας συζητούν τα αποτελέσματα των ατομικών τους επεξεργασιών. Συγκρίνουν αποτελέσματα, αντιπαραβάλλουν τρόπους κατασκευής ή υπολογισμού, συμφωνούν ή διαφωνούν με αυτό που βρήκε ο συμμαθητής τους, ελέγχουν ξανά τους δικούς τους υπολογισμούς ή τον τρόπο κατασκευής και καταλήγουν σε κάποια κοινά συμπεράσματα (ακόμη και ότι δεν συμφωνούν στο αποτέλεσμα). Σ’ αυτή τη φάση ο εκπαιδευτικός βοηθά και διασφαλίζει τον παραγωγικό χαρακτήρα των συζητήσεων μέσα στην ομάδα (π.χ. ένας μαθητής αναλαμβάνει να καταγράψει όλες τις απαντήσεις - λύσεις, στη συνέχεια αυτές ομαδοποιούνται και οι μαθητές πρέπει να ελέγξουν πού βρίσκονται οι διαφορές). Οι μαθητές μπορεί να μην είναι σε θέση να αναλύσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν. Μπορούν όμως να εξηγήσουν τον τρόπο που μέτρησαν κάτι ή που κατασκεύασαν το ζητούμενο. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί αφενός βοηθά στην συγκρότηση του λόγου και της σκέψης και αφετέρου θέτει σε κίνηση διεργασίες αυτοελέγχου των ενεργειών που περιγράφονται. Ταυτόχρονα οι μαθητές εξοικειώνονται με την ύπαρξη διαφορετικών λύσεων - οι οποίες δεν είναι κατ' ανάγκη λανθασμένες – και με την αποδοχή της έκφρασης διαφορετικών απόψεων. Μέσα από τη συλλογική δράση αναπτύσσονται σχέσεις συνεργασίας, αλληλοβοήθειας και αποδοχής (θα μπορούσαμε συμβολικά να χαρακτηρίσουμε αυτές τις διεργασίες «οριζόντια» ανάπτυξη σχέσεων σε αντίθεση με τη «κάθετη – ακτινωτή» του κάθε μαθητή ξεχωριστά με τον εκπαιδευτικό).

γ) Στην τρίτη φάση οι μαθητές της τάξης συζητούν όλοι μαζί. Ο εκπαιδευτικός καταγράφει στον πίνακα τις απόψεις – απαντήσεις της κάθε ομάδας (μια ή περισσότερες) δίχως να τις αξιολογεί. Ο κάθε μαθητής που προτείνει μια λύση – απάντηση εξηγεί την απάντησή του (πώς την βρήκε, γιατί τη θεωρεί σωστή). Ο εκπαιδευτικός θέτει σε συζήτηση τις διαφορετικές απαντήσεις. Σ' αυτό το σημείο μπορεί να συναντήσει τρεις διαφορετικές καταστάσεις.

Μια περίπτωση είναι να διατυπώθηκαν σωστές λύσεις με διαφορετικό τρόπο έκφρασης ή διαφορετική μέθοδο υπολογισμού. Σ' αυτή την περίπτωση η συζήτηση έχει ως στόχο αφενός να φανεί πως πρόκειται για την ίδια λύση και αφετέρου να καταγραφούν οι διαφορετικές μέθοδοι επεξεργασίας ή στρατηγικές για να εμπλουτιστεί μ' αυτές το ρεπερτόριο των δεξιοτήτων των μαθητών.

Άλλη περίπτωση είναι να διατυπώθηκαν διαφορετικές απαντήσεις (σωστές και λανθασμένες). Σ' αυτή την περίπτωση η συζήτηση έχει ως στόχο την επανεξέταση από τους μαθητές του τρόπου υπολογισμού ή κατασκευής που ακολούθησαν για να εντοπιστεί από τους ίδιους το λάθος που έκαναν (με τη βοήθεια των αντίθετων επιχειρημάτων των συμμαθητών τους). Ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι προετοιμασμένος για να υποστηρίξει με κατάλληλα ερωτήματα τον αυτοέλεγχο και την αυτοδιόρθωση από την πλευρά των μαθητών. Σε καμία περίπτωση δεν διατυπώνει τη σωστή απάντηση αυτός, γιατί κάτι τέτοιο θα διέκοπτε άμεσα τις επεξεργασίες των μαθητών.

Τέλος μπορεί όλες οι απαντήσεις να είναι λανθασμένες. Σ' αυτή την περίπτωση ο εκπαιδευτικός πρέπει να αναρωτηθεί τι απουσιάζει στις γνώσεις και στις δεξιότητες των μαθητών και τους εμποδίζει να επεξεργαστούν αποτελεσματικά το πρόβλημα. Είναι πιθανό το ίδιο το πρόβλημα να είναι διδακτικά ακατάλληλο, με την έννοια ότι απέχει σημαντικά από τις δυνατότητες των μαθητών. Η διατύπωση της ορθής λύσης από τον εκπαιδευτικό δεν βοηθά στην οικοδόμηση της γνώσης από τους μαθητές. Είναι προτιμότερο ο εκπαιδευτικός να κλείσει τη δραστηριότητα λέγοντας ότι «χρειάζεται να το ξαναδούμε» και να επανέλθει με μια άλλη δραστηριότητα, η οποία θα ανταποκρίνεται περισσότερο στις γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών.

Οι ποικιλία, η έκταση και οι ιδιαιτερότητες των διδασκόμενων εννοιών στα Μαθηματικά είναι πολύ μεγάλη. Το πλήθος των δραστηριοτήτων και του υλικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι επίσης ανεξάντλητο. Κανένα βοήθημα δεν μπορεί να καλύψει όλες τις ανάγκες που μπορεί να αντιμετωπίσει ένας εκπαιδευτικός σε μια τάξη με παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες για τα Μαθηματικά.

Ωστόσο η αλλαγή από την παραδοσιακή μορφή μετωπικής διδασκαλίας σε μια διδασκαλία που ενθαρρύνει τη δραστηριοποίηση και την ενεργητική οικοδόμηση της γνώσης από τους μαθητές και η αντίληψη του ρόλου του εκπαιδευτικού ως οργανωτή μιας ενεργητικής μάθησης, μαζί με τις προσαρμογές και το υποστηρικτικό υλικό μπορούν να τον βοηθήσουν να αποκτήσει *ευλυγισία* στην αναζήτηση ή το σχεδιασμό των κατάλληλων δραστηριοτήτων που επιτρέπουν τη στήριξη και το προχώρημα των παιδιών που παρουσιάζουν μαθησιακές δυσκολίες, με ανάπτυξη μέσων, μεθόδων και στρατηγικών που θα τους επιτρέψουν να ανταποκριθούν στις μαθηματικές απαιτήσεις των σπουδών τους στο Γυμνάσιο.

Έννοιες κατά θεματικό άξονα για την Α' Τάξη Γυμνασίου

- **Φυσικοί Αριθμοί και Πράξεις**

Γραφή – συμβολισμός – δεκαδικό σύστημα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να γράφουν και να ονομάζουν αριθμούς και να περνούν από τη λεκτική στη συμβολική γραφή και αντίστροφα. Να διακρίνουν την διαφορετική αξία καθενός από τα ψηφία που σχηματίζουν έναν φ.α. Να γνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης (σύστημα θέσης)	Να γνωρίζουν τη λεκτική και συμβολική γραφή των αριθμών και την αξία θέσης των ψηφίων. Να γνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης (σύστημα θέσης)	Γράφουν και διαβάζουν φυσικούς αριθμούς Γνωρίζουν την αξία θέσης των ψηφίων Γνωρίζουν ότι κάθε μονάδα ανώτερης τάξης είναι 10 φορές η προηγούμενη.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Ο άξονας «Φυσικοί Αριθμοί» έχει καθαρά επαναληπτικό χαρακτήρα. Οι μαθητές επαναλαμβάνουν γνώσεις που έχουν διδαχτεί στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχετικά με τον προφορικό και γραπτό συμβολισμό των αριθμών, την διάκριση της αξίας των ψηφίων, τη σύγκριση, τη διάταξη και τη στρογγυλοποίηση των φυσικών αριθμών.

Κύριος στόχος του άξονα αυτού είναι η συστηματοποίηση και η εμπέδωση των γνώσεων αυτών. Στην ενότητα αυτή, επιδιώκεται να κατοχυρωθεί ότι οι μαθητές χειρίζονται με άνεση τη γραφή των αριθμών και αναγνωρίζουν το μοντέλο πάνω στο οποίο στηρίζεται το δεκαδικό σύστημα.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές δεν αναμένεται να παρουσιάζουν δυσκολίες στη γραφή και την ανάγνωση των αριθμών, αλλά δεν είναι βέβαιο ότι κατανοούν το μοντέλο πάνω στο οποίο είναι οικοδομημένο τη δεκαδικό σύστημα. Η ολοκληρωμένη κατανόηση της «αξίας θέσης» των αριθμών ακολουθεί εξελικτική πορεία και αναπτύσσεται σταδιακά κατά τη διάρκεια της σχολικής ηλικίας. Η βαθιά κατανόηση της αξίας θέσης αποτελεί προϋπόθεση για την αντίληψη των αριθμών και την κατανόηση των υπολογισμών (Verschaffel, L. & De Corte, E. 1996, Van de Walle, 2001).

Διδακτικές υποδείξεις

Η κατανόηση της αξίας θέσης, προϋποθέτει την ομαδοποίηση των αριθμών με βάση τη δεκάδα. Η διαδικασία οικοδόμησης του δεκαδικού μοντέλου χαρακτηρίζει τον τρόπο γραφής και διατύπωσης των αριθμών.

Ο τρόπος προφορικής διατύπωσης ενός αριθμού, όπως και η συμβολική έκφραση π.χ. εξήντα τέσσερα και 64, χρειάζεται να συνδέεται στην αντίληψη των μαθητών με την έννοια της ομαδοποίησης κατά δεκάδες. Η απαρίθμηση ανά δεκάδες και μονάδες και η αναφορά των ομάδων και των μονάδων π.χ. έξι δεκάδες και τέσσερα παρέχουν αυτό το μηχανισμό σύνδεσης. Η ξεχωριστή αναφορά των δεκάδων και των μονάδων κλπ., μπορεί να θεωρηθεί ως «γλώσσα της αξίας θέσης».

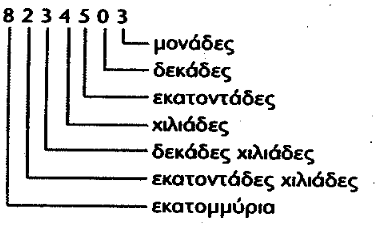
Το σύστημα συμβόλων που χρησιμοποιούμε για να γράψουμε τους αριθμούς πρέπει να είναι σε αντιστοιχία με το σύστημα ομαδοποίησης. Η γλώσσα συνδέει τις δύο μορφές παράστασης.

Τα σχετικά μοντέλα υλικού και αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της έννοιας της δεκαδικής βάσης, μπορούν βοηθήσουν αποτελεσματικά αρκεί να είναι μοντέλα που οι μαθητές οργανώνουν και περιγράφουν οι ίδιοι.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Ξεκινούμε την ενότητα με **δραστηριότητες** που διερευνούν την γνώση των μαθητών σχετικά με την αξία θέσης των αριθμών και την αντίληψη της εκατοντάδας. Χρησιμοποιούμε το διάγραμμα 0-99και ζητάμε από τους μαθητές να βρουν σχέσεις,. Δεχόμαστε όλες τις ιδέες τους.

Ας πάρουμε τον αριθμό 8234503.
Στον αριθμό αυτό η σημασία του κάθε ψηφίου είναι:



Γραφή των αριθμών

Δραστηριότητα 1η

Οι αριθμοί δεν γράφονταν πάντα με τα ίδια σύμβολα.

Αιγυπτιακοί αριθμοί

Το 3.000 π.Χ. περίπου τα μαθηματικά χαράσσονταν στον τάφο ενός Φαραώ.

Οι αριθμοί γράφονταν πολύ απλά

𓏺 για 1
𓎆 για 10
𓍢 για 100

𓏺	𓏻	𓏼	𓏽	𓏾	𓏿	𓐀	𓐁	𓐂	𓎆	𓍢
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100

Επομένως 𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓐀 είναι ο αριθμός 237

και 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓐁 είναι ο αριθμός 528

Να μετατρέψεις τους παρακάτω Αιγυπτιακούς αριθμούς σε δεκαδικούς.

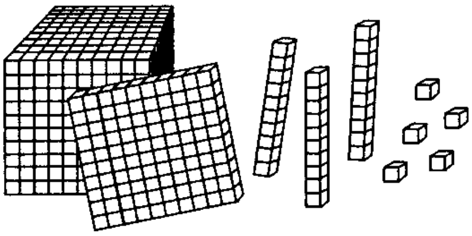
1) 𓍢𓍢𓎆𓎆𓏼 2) 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓏾 3) 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓐀

4) 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓐂 5) 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺 6) 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏿

Να μετατρέψεις τους παρακάτω αριθμούς σε Αιγυπτιακούς.

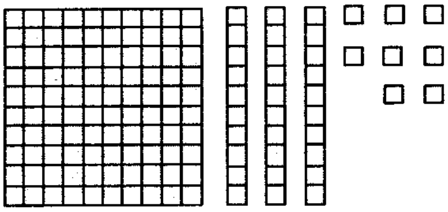
7) 248 8) 150 9) 13
10) 96 11) 601 12) 542

Δραστηριότητα 2^{η}



Γράψε μερικούς αριθμούς ως το 1000. Στη συνέχεια χρησιμοποίησε το εκπαιδευτικό υλικό για να τους παραστήσεις.

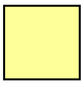
Δραστηριότητα 3^{η}



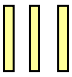
Κατασκεύασε με χαρτόνι 1άδες, 10άδες, 100άδες και στη συνέχεια αναπαράστησε έναν αριθμό και γράψε τον. Με πόσους τρόπους μπορείς να αναπαραστήσεις τον ίδιο αριθμό;

Δραστηριότητα 4^{η}

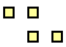
Γράψε μερικούς αριθμούς ως το 1000 και στη συνέχεια χρησιμοποίησε τις παρακάτω παραστάσεις για να τους παραστήσεις.



εκατοντάδες



δεκάδες



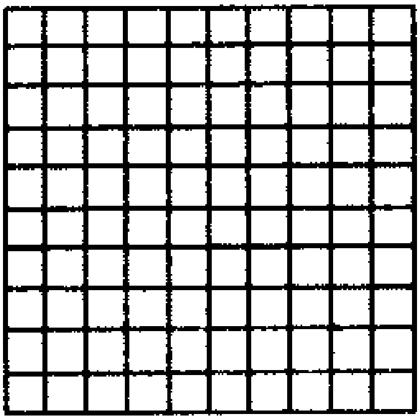
μονάδες

Δραστηριότητα 5^{η}

Συμπλήρωσε τον πίνακα και διάβασε τους αριθμούς.

αριθμός	Εκατομμύρια	Εκατοντάδες χιλιάδες	Δεκάδες χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
48							
325							
6465							
12174							
113243							
1031157							

Δραστηριότητα 6η



Στον πίνακα που έχεις διάταξε τους αριθμούς από το 0-99 με όποιον τρόπο θέλεις και να περίγραψε το πρότυπο που χρησιμοποιείς.

Ενδεικτικές προφορικές και νοερές δραστηριότητες

Με νοερούς υπολογισμούς:

- Τι παριστάνει το ψηφίο 2 στους αριθμούς: 102, 320, 254, 2.138, 25.000
- Έχει 23 μονάδες και 4 δεκάδες. Ποιος αριθμός είναι;
- Έχει 4 εκατοντάδες, 12 δεκάδες και 6 μονάδες. Ποιος αριθμός είναι;
- Έχει 30 μονάδες και 3 εκατοντάδες. Ποιος αριθμός είναι;
- Έχει 13 δεκάδες, 3 εκατοντάδες και 31 μονάδες. Ποιος αριθμός είναι;
- Ο 341, έχει 22 δεκάδες, πόσες μονάδες έχει;
- Έχει 17 μονάδες, είναι ανάμεσα στο 40 και το 50. Ποιος αριθμός είναι;
- Έχει 17 μονάδες, είναι ανάμεσα στο 40 και το 50. Πόσες δεκάδες έχει;

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Πόσοι είναι οι φυσικοί αριθμοί ανάμεσα στο 1 και το 100.
2. Πόσοι είναι οι μονοψήφιοι, διψήφιοι και τριψήφιοι αριθμοί από το 1 έως το 100.

Σύγκριση – Διάταξη - Παράσταση		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να συγκρίνουν δύο αριθμούς και να χρησιμοποιούν σωστά τα σύμβολα σύγκρισης. Να διατάσσουν αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και αντίστροφα. Να τοποθετούν αριθμούς σε μια αριθμογραμμή.	Να συγκρίνουν και να διατάσσουν αριθμούς. Να αντιστοιχούν φ.α. με σημεία του άξονα.	Συγκρίνουν και διατάσσουν φυσικούς αριθμούς. Αποκτούν αίσθηση των αριθμών. Σχεδιάζουν την αριθμητική ευθεία Τοποθετούν τους φυσικούς αριθμούς στην αριθμητική ευθεία.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Η σύγκριση, η διάταξη και τη στρογγυλοποίηση των φυσικών αριθμών αφορούν επίσης γνώσεις των μαθητών από το Δημοτικό, που στην ενότητα αυτή συστηματοποιούν και εμπεδώνουν οι μαθητές.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται βοηθούν τους μαθητές να αποκτήσουν «αίσθηση του αριθμού» η οποία θα στηρίξει τη στρογγυλοποίηση και τις νοερές πράξεις. Η παράσταση αυτής της διάταξης στην ευθεία των αριθμών στηρίζει επίσης την ανάπτυξη αυτής της αίσθησης.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι συγκρίσεις των αριθμών είναι οικείες στους μαθητές, ωστόσο η παράσταση τους στην αριθμητική γραμμή αναδεικνύει ελλείψεις σε αυτή την κατανόηση που θα αντιμετωπισθούν σε αυτή την ενότητα. Η διαίρεση σε ίσα διαστήματα (δεκάδες ή εκατοντάδες) και η αντιστοίχηση με της θέσεις των αριθμών κατοχυρώνει γνώσεις που αργότερα θα αξιοποιηθούν στο «γέμισμα» αυτής της παράστασης με δεκαδικούς και ρητούς αριθμούς.

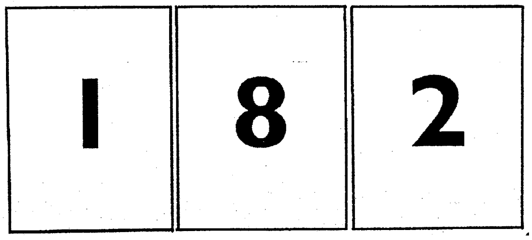
Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Οι σχέσεις των αριθμών «μεγαλύτερο ή πολύ μεγαλύτερο», «πολύ μικρότερο», «παρόμοιο ή περίπου το ίδιο» είναι στοιχεία που στηρίζουν αυτό που ονομάστηκε αίσθηση των αριθμών και η αριθμητική γραμμή βοηθάει τους μαθητές να δουν πως σχετίζεται ο ένας αριθμός με τον άλλον.

Η ευθεία, αρχικά, των φυσικών αριθμών η οποία παρουσιάζεται ως ευθεία και όχι ως ημιευθεία με αρχή το 0, με στόχο να προετοιμαστούν οι μαθητές των μαθητών για την εισαγωγή των ακεραίων αριθμών. Επισημαίνεται πάντα ότι ανάμεσα στους αριθμούς που έχουν τοποθετηθεί, θα μπουν κι άλλοι αριθμοί που δεν είναι φυσικοί ή ακέραιοι.

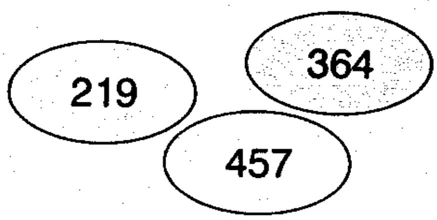
Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η



Σχημάτισε με αυτές τις τρεις καρτέλες όσους περισσότερους αριθμούς μπορείς και να βρεις ποιος από αυτούς είναι ο μεγαλύτερος και ποιος ο μικρότερος.

Δραστηριότητα 2η



Γράψε τρεις τυχαίους τριψήφιους αριθμούς. Ποιοι από αυτούς βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους και γιατί; Βρες έναν αριθμό μεγαλύτερο από τους τρεις; Βρες έναν αριθμό μικρότερο από τους τρεις;

Ποιος αριθμός είναι πιο κοντά στο 300; Στο 250;

Βρες αριθμούς ανάμεσα στο 219 και 364;

Βρες αριθμούς ανάμεσα στο 364 και 457;

Δραστηριότητα 3η

Να κατασκευάσεις την ευθεία των φυσικών αριθμών (αριθμογραμμή) και να βάλεις τους φυσικούς αριθμούς από το 0-100, κατά δεκάδες από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά): 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100
- Τοποθέτησε με τον ίδιο τρόπο σε μια ευθεία τους αριθμούς: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000
- Κάνε το ίδιο με τους αριθμούς:1000, 1100, 1200, 1500, 1700, 1800, 2000

Δραστηριότητα 4η

Να σχεδιάσεις μια γραμμή με τις ενδείξεις 0 και 100 στα δύο άκρα. Στη συνέχεια να υπολογίσεις και να σημαδέψεις, όσο καλύτερα μπορείς, έναν αριθμό, πχ. το 36, το 67 και το 88. Έλεγξε αν έχεις υπολογίσει σωστά.

Ενδεικτικές προφορικές και νοερές δραστηριότητες

Με νοερούς υπολογισμούς

- Πόσους αριθμούς μπορείς να σχηματίσεις με τα ψηφία 3 και 7; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;
- Πόσους αριθμούς μπορείς να σχηματίσεις με τα ψηφία 4, 2 και 8; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;
- Πόσους αριθμούς μπορείς να σχηματίσεις με τα ψηφία 1, 3, 6 και 9; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;
- Ποιοι αριθμός είναι πριν και ποιοι μετά από τους αριθμούς: 100, 1.000, 1.016, 2.314, 10.500, 20.345 κ.α.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Πόσα ψηφία έχει το δεκαδικό μας σύστημα;
2. Πόσους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία του δεκαδικού μας συστήματος;
3. Από δύο φυσικούς αριθμούς που δεν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, ποιος είναι ο μεγαλύτερος;
4. Από δύο φυσικούς αριθμούς που έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, ποιος είναι ο μεγαλύτερος;

Εκτιμήσεις - Στρογγυλοποιήσεις		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να στρογγυλοποιούν αριθμούς όπου είναι δυνατόν. Να ελέγχουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα μιας πράξης	Να στρογγυλοποιούν φυσικούς αριθμούς. Να ελέγχουν το αποτέλεσμα μιας πράξης με νοερές διαδικασίες εκτιμώντας το μέγεθος του αποτελέσματος	Προσεγγίζουν την έννοια της στρογγυλοποίησης και στρογγυλοποιούν σε πραγματικές καταστάσεις. Κάνουν εκτιμήσεις και νοερούς υπολογισμούς.
Να χρησιμοποιούν τον υπολογιστή τσέπης	Να μπορούν να χρησιμοποιούν τον υπολογιστή τσέπης για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων	Επιβεβαιώνουν με τον υπολογιστή τσέπης

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Κύριος στόχος στην ενότητα αυτή είναι η συστηματοποίηση και η εμπέδωση των γνώσεων από το Δημοτικό

Η διαδικασία της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών αποτελεί μια καθημερινή αναγκαιότητα. Οι δεξιότητες εκτίμησης των αριθμών συσχετίζεται με την ικανότητα αντικατάστασης ενός αριθμού με ένα άλλο καταλληλότερου που διευκολύνει την αντίληψη μιας ποσότητας, την εκτέλεση πράξεων ή την διευκόλυνση κάποιου νοερού υπολογισμού.

Η επιλογή ενός «κατάλληλου αριθμού»στη θέση κάποιου λιγότερου χρηστικού δεν είναι απολύτως σαφής. Η επιλογή σχετίζεται με την ακρίβεια που επιδιώκεται και τον τρόπο χρήσης του αντικαταστάτη.

Είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ των αριθμών που επιδέχονται στρογγυλοποίηση και των αριθμών που δεν επιδέχονται π.χ. ταχυδρομικοί κώδικες, πινακίδες αυτοκινήτων, αριθμοί τηλεφώνου κ.α.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές συχνά είναι σε θέση να κάνουν εκτιμήσεις ή στρογγυλοποιήσεις σε καθημερινές καταστάσεις, αλλά συχνά εμφανίζουν δυσκολίες όταν δοκιμάζουν να τυποποιήσουν τις διαδικασίες αυτές. Η προσέγγισή της στρογγυλοποίησης μέσα από οικίες για αυτούς καταστάσεις διευκολύνει την κατανόησή της.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Στρογγυλοποίηση ενός αριθμού σημαίνει, όπως αναφέρθηκε, αντικατάσταση του από έναν πιο «κατάλληλο» που βρίσκεται κοντά του, έτσι ώστε να μπορεί να γίνει ένας υπολογισμός με μεγαλύτερη ευκολία. Ο κοντινός αυτός αριθμός δεν χρειάζεται να είναι μόνο πολλαπλάσιο του 10 ή 100, αλλά μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κατάλληλος αριθμός, αρκεί να κάνει τον υπολογισμό ή την εκτίμηση ευκολότερη ή να απλοποιεί τους αριθμούς π.χ. «Χθες μου πήρε 57 λεπτά για να κάνω τα μαθήματά μου» ή «Χθες μου πήρε περίπου 1 ώρα για να κάνω τα μαθήματά μου». Η πρώτη έκφραση είναι ακριβής, ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί έναν στρογγυλοποιημένο αριθμό για καλύτερη επικοινωνία. Η στρογγυλοποίηση των 57 λεπτών σε 60 λεπτά δεν αλλάζει τον πραγματικό χρόνο.

Στο παρελθόν οι μαθητές διδάσκονταν κανόνες για την στρογγυλοποίηση των αριθμών στην κοντινότερη 10άδα ή 100άδα και η έμφαση δινόταν στην σωστή εφαρμογή των κανόνων. Η κατάσταση και ο λόγος για αυτή τη στρογγυλοποίηση των αριθμών είχε μικρότερη σημασία.

Ο σημαντικότερος στόχος για την κατ' εκτίμηση υπολογισμό, είναι να μπορούν οι μαθητές να βρίσκουν με συντομία ένα κατά προσέγγιση αποτέλεσμα. Οι δεξιότητες της εκτίμησης εκτός από το να είναι πολύτιμες για την εξοικονόμηση χρόνου στην καθημερινή ζωή, επιτρέπουν ποικίλες υπολογιστικές στρατηγικές, δεδομένου ότι σε αυτή δεν χρησιμοποιούνται φυσικά υλικά, ούτε οπτικές αναπαραστάσεις, αλλά νοερές δραστηριότητες.

Διδακτικά δεν επιδιώκεται να αναπτυχθούν συγκεκριμένες διαδικασίες ή αλγόριθμοι εκτίμησης αλλά να δοθεί στους μαθητές η ευκαιρία να αναπτύξουν τις δικές τους στρατηγικές και να κάνουν εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας όποια στρατηγική θεωρούν καταλληλότερη για την δραστηριότητα που τους ανατίθεται. Ακόμη να μπορούν να συγκρίνουν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν με αυτές των συμμαθητών τους για να καταλήξουν στην επιλογή της καταλληλότερης.

Η στρογγυλοποίηση είναι η πιο γνωστή μορφή εκτίμησης. Είναι ένας τρόπος απλοποίησης του προβλήματος έτσι ώστε να γίνει πιο εύκολη η επεξεργασία του με το μυαλό. Για να είναι χρήσιμη στην εκτίμηση θα πρέπει να είναι εύκαμπτη και να γίνει εννοιολογικά κατανοητή.

Όταν έχουμε να προσθέσουμε πολλούς αριθμούς, είναι καλύτερα να τους στρογγυλοποιήσουμε ώστε να φέρουν την ίδια αξία θέσης. Στην αφαίρεση συνήθως στρογγυλοποιούμε τον ένα από τους δύο αριθμού. Στον πολλαπλασιασμό ισχύουν τα ίδια με τις υπόλοιπες πράξεις, ενώ στην διαίρεση είναι καλύτερα να αναζητούμε έναν συμβατό διαιρέτη.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

Δραστηριότητα 1η

Να μετρήσεις και να γράψεις τους αριθμούς ανά 5, 10, 25, 50, 100 μέχρι το 1000.

Δραστηριότητα 2η

Να στρογγυλοποιήσεις τις αποστάσεις:

- Η απόσταση Αθήνας – Θεσσαλονίκης οδικώς είναι περίπου ……… χιλιόμετρα.
- Η απόσταση Γης – Σελήνης είναι περίπου ……………………… χιλιόμετρα.
- Η έκταση της Ελλάδας είναι περίπου ……………………… τετραγωνικά χιλιόμετρα.
- Ο Όλυμπος έχει ύψος περίπου …………… μέτρα.

Δραστηριότητα 3η

Να στρογγυλοποιήσεις τις τιμές των προϊόντων:
Ένα ζευγάρι παπούτσια κοστίζει ……………………..…ευρώ, περίπου.
Μια ηλεκτρική κουζίνα κοστίζει…………………………..ευρώ, περίπου.
Ένα ηλεκτρικό ψυγείο κοστίζει……………………..…ευρώ, περίπου.
Ένα ηλεκτρικό πλυντήριο κοστίζει………………………ευρώ, περίπου.

2. Κατ' εκτίμηση υπολογισμοί με στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

Δραστηριότητα 4η

Για 30 αναψυκτικά των 69 λεπτών πόσα ευρώ θα χρειαστούμε:
Α) 2, Β) 10, Γ) 21, Δ) 210

Δραστηριότητα 5η

Να υπολογίσετε νοερά το ποσό των ευρώ:
349,29 + 85,99 + 175,25 =
48,27 + 1,89 + 0,85 + 7,10 + 24,95 =

Δραστηριότητα 6η

	Ποιο από αυτά είναι πιο κοντά στο
362+583	
409+186	600
391-156	1000
503-388	100
36Χ26	
173Χ52	
7214/70	
913/18	

Δραστηριότητα 7η

Τρεις φίλοι θέλουν να κάνουν το γύρο της Ευρώπης. Κάθε μέρα διανύουν με τις μηχανές τους 485 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα περίπου θα ταξιδέψουν σε 15 ημέρες;

Ενδεικτικές προφορικές και νοερές δραστηριότητες

Με νοερούς υπολογισμούς

- Τα παρακάτω ποσά παριστάνουν χρήματα σε €, στρογγυλοποίησε τους: 999, 1.995, 1001, 10.015
- Οι παρακάτω αριθμοί παριστάνουν χιλιόμετρα, στρογγυλοποίησε τους: 322, 431, 543, 674, 785, 854, 956, 976
- Στρογγυλοποίησε τους παρακάτω αριθμούς στις εκατοντάδες:

121, 234, 342, 453, 579, 648, 759, 847, 957

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Υπολόγισε νοερά το άθροισμα 75 + 225 + 1700
2. Στρογγυλοποίησε τα παρακάτω ποσά: 89€, 920€, 1780€, 10900€.

Πράξεις		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων	Να εκτελούν με ευχέρεια τις τέσσερις βασικές πράξεις. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων και να τις χρησιμοποιούν στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης. Να εκτελούν τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα (με ή χωρίς την βοήθεια υπολογιστή τσέπης) Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων και να λύνουν σύνθετα προβλήματα τεσσάρων πράξεων	Προσθέτουν και αφαιρούν φυσικούς αριθμούς και εντοπίζουν τις βασικές ιδιότητες. Πολλαπλασιάζουν και διαιρούν φυσικούς αριθμούς και εντοπίζουν τις βασικές ιδιότητες. Λύνουν απλά καθημερινά προβλήματα με τη χρήση των τεσσάρων πράξεων.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Σημασία, στην ενότητα αυτή, έχει οι μαθητές να συνδέσουν διαφορετικές σημασίες, ερμηνείες και σχέσεις με τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, έτσι ώστε να είναι σε θέση να τις χρησιμοποιούν αποτελεσματικά σε διάφορες περιστάσεις. Να καλλιεργήσουν την αντίληψη των αριθμητικών πράξεων και των πολλών διαφορετικών, αλλά αλληλοσυσχετιζόμενων σημασιών που λαμβάνουν σε πραγματικές καταστάσεις.

Οι μαθητές λύνοντας απλά ή σύνθετα προβλήματα, αποκτούν γνώσεις για τις αριθμούς, αλλά παράλληλα οικοδομούν καινούργιες αριθμητικές σχέσεις και στρατηγικές σκέψης που θα τους βοηθήσουν να κατανοήσουν και να επεξεργαστούν το νόημα των πράξεων.

Η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι πράξεις αντίθετες και χρειάζεται να γίνονται αντιληπτές σε αλληλεξάρτηση. Η πρόσθεση παρουσιάζει τα μέρη μιας ποσότητας ή ενός συνόλου, ενώ η αφαίρεση παρουσιάζει τα συμπληρώματα.

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι πράξεις αντίστροφες και χρειάζεται επίσης να γίνουν αντιληπτές σε αλληλεξάρτηση. Ο πολλαπλασιασμός απαριθμεί ομάδες του ιδίου μεγέθους και καθορίζει τη συνολική τους ποσότητα, αλλά παράλληλα δημιουργεί ένα νέο μέγεθος. Για το λόγο αυτό η προσθετική παρουσίαση του δεν καλύπτει εννοιολογικά το πεδίο των πολλαπλασιασμών. Όμοια η διαίρεση παρουσιάζει τον άγνωστο παράγοντα σε σχέση με τον γνωστό παράγοντα και το γινόμενο.

Για τη επίλυση απλών και σύνθετων προβλημάτων, είναι απαραίτητο να γίνει αντιληπτό ότι οι καταστάσεις που παρουσιάζουν (προσθετικές και πολλαπλασιαστικές) είναι διαφορετικές. Ακόμα κι ένα απλό πρόβλημα πρόσθεσης μπορεί να διαφοροποιηθεί από άποψη δυσκολίας ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται (ένωση ποσοτήτων, μετασχηματισμός ποσοτήτων, σχέσεις ποσοτήτων) όπως κι αντίστοιχα ένα απλό πρόβλημα πολλαπλασιασμού (ένα μέγεθος, αναλογία δύο μεγεθών, δημιουργία νέου μεγέθους). Η εξοικείωση των μαθητών με όλες τις προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και τις αντίστροφες πράξεις στηρίζει την ικανότητα λύσης προβλημάτων.

Διδακτικές υποδείξεις

Τα λεκτικά προβλήματα και τα μοντέλα είναι τα δύο βασικά εργαλεία που διαθέτει ο εκπαιδευτικός για να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την έννοια των πράξεων. Η αναπαράσταση των πράξεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποσαφηνίσουν τις διεργασίες σκέψης που κάνουν. Τα μοντέλα πρέπει να πηγάζουν από τους ίδιους τους μαθητές και να μην επιβάλλονται τεχνικά.

Στόχος του μαθήματος δεν πρέπει να είναι η επιβολή ενός «σωστού» μοντέλου, αλλά η ανακάλυψη και η υιοθέτηση του περισσότερο λειτουργικού μοντέλου μέσα από συζήτηση και διάλογο. Δεν υπάρχει κανένας απολύτως λόγος να αποθαρρύνουμε την υιοθέτηση ενός μοντέλου από τον μαθητή όταν το έχει κατανοήσει και συνειδητοποιεί πότε και πως το χρησιμοποιεί. Παράλληλα προτείνονται δραστηριότητες για τη συσχέτιση των πράξεων και την προσέγγιση των ιδιοτήτων τους.

Όπως αναφέρθηκες ήδη είναι απαραίτητο να παρουσιάζονται οι διαφορετικοί τύποι προβλημάτων για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και να μη περιορίζονται σε μορφές «βάζω μαζί»/ «χωρίζω», ή «επαναλαμβάνω μια πρόσθεση»/ «μοιράζω σε μέρη». Για να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός πρέπει οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με όλες τις δομές προβλημάτων για να έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν τις αντίστοιχες διεργασίες σκέψεις.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Πρόσθεση

Δραστηριότητα 1η

Ο Νίκος στον κουμπαρά του είχε 479 €, ενώ η αδερφή του 563 €. Πόσα χρήματα έχουν κι οι δύο μαζί;

Δραστηριότητα 2η

Ένα ψυγείο κοστίζει σε ένα μαγαζί 895 € και σε ένα άλλο 35 € περισσότερο. Πόσο στοιχίζει στο δεύτερο μαγαζί;

Δραστηριότητα 3η

Ο πατέρας του Γιώργου συμπληρώνει τα χρήματα που έχει και είναι 287 € με 56 €, για να πληρώσει τη δόση του αυτοκινήτου. Πόσα χρήματα είναι η δόση;

2. Αφαίρεση

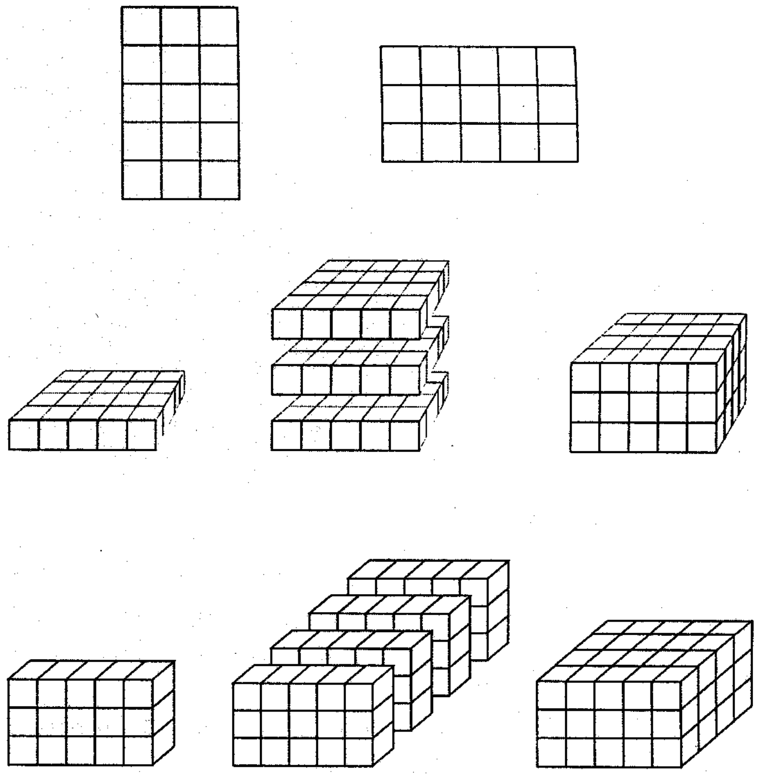
Δραστηριότητα 4η

Ο Νίκος στον κουμπαρά του έχει 479 ευρώ. Πόσα είναι τα χρήματα της αδερφής του όταν και στους δύο κουμπαράδες τα χρήματα είναι 1042 ευρώ;

Δραστηριότητα $5^{η}$
Μια μπλούζα στοιχίζει σε ένα μαγαζί 78 € και σε ένα άλλο 95€. Πόσα € διαφορά έχουν οι δύο τιμές;

Δραστηριότητα $6^{η}$
Ο Ανδρέας έχει 134 € και ο Πέτρος 252 €. Πόσα χρήματα περισσότερο έχει ο Πέτρος;
3. Πολλαπλασιασμός

Δραστηριότητα $7^{η}$
Υπολόγισε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείς τον αριθμό των τετραγώνων και των κύβων.



Σε ποια συμπεράσματα σε οδηγούν οι λύσεις αυτού του προβλήματος; Να τα διατυπώσεις γραπτώς.

Δραστηριότητα $8^{η}$
Να κατασκευάσεις τον Πυθαγόρειο πίνακα του πολλαπλασιασμού. Σε ποια συμπεράσματα σε οδηγούν τα γινόμενα του πολλαπλασιασμού των μονοψήφιων αριθμών;

Δραστηριότητα $9^{η}$
Σε μια τηλεφωνική εταιρεία, το κάθε λεπτό ομιλίας κοστίζει 32 λεπτά. Πόσα χρήματα θα πληρώσεις για 76 λεπτά χρόνου ομιλίας;

Δραστηριότητα 10η
Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει 46 μέτρα μήκος και 120 πλάτος. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το εμβαδόν του.

4. Διαίρεση

Δραστηριότητα 11η

Πόσα λεωφορεία θα χρειαστεί ένα σχολείο με 288 μαθητές και 24 καθηγητές για να πάει μια ημερήσια εκδρομή όταν το κάθε λεωφορείο παίρνει 52 επιβάτες; Τι θα συνέβαινε αν οι μαθητές ήταν 356 και οι καθηγητές 30;
Να κάνεις μία δοκιμή για να βεβαιωθείς ότι δεν έκανες λάθος.

Δραστηριότητα 12η

Ο Θανάσης θέλει να αγοράσει ένα κάλυμμα για το κρεβάτι του που έχει επιφάνεια 16800 τετραγωνικά εκατοστά. Αν το φάρδος του υφάσματος που θέλει να αγοράσει είναι 84 εκατοστά, πόσο μήκος ύφασμα χρειάζεται να αγοράσει;

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση στην πρόσθεση

1. Διατύπωσε τις ιδιότητες της πρόσθεσης με δικά σου λόγια.

2. Με ποια ιδιότητα της πρόσθεσης αντιστοιχεί κάθε μια από τις παραστάσεις;

3 + 4 = 4 + 3	
(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3)	

3. Με βάση τις ιδιότητες της αφαίρεσης ποιες αφαιρέσεις προκύπτουν;

10 + 6 = 16
α)
β)

4. Διατύπωσε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού με δικά σου λόγια.

5. Με ποια ιδιότητα του πολλαπλασιασμού αντιστοιχεί κάθε μια από τις παραστάσεις;

3 X 4 = 4 X 3	
(2 X 5) X 3 = 2 X (5 X 3)	
12 + 28 + 40 = 4X3 + 4X7 + 4X10 = 4 (3 + 7 + 10)	

6. Πώς πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 10, 100, 1.000, κλπ.

7. Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 ακριβώς. Ποιο είναι το υπόλοιπο;

8. Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 και αφήνει ένα υπόλοιπο. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς μπορεί να είναι υπόλοιπο: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

9. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης ενός αριθμού με το 1; Και ποιο της διαίρεσης με το 0;

Διαιρετότητα φυσικών αριθμών		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να γνωρίζουν τους πρώτους και σύνθετους αριθμούς και παραγοντοποιούν. Να γνωρίζουν πότε ένας αριθμός διαιρείται με: 2, 4, 5, 10, 25, 3, 9. Να βρίσκουν το Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. δύο αριθμών Να γνωρίζουν την Ευκλείδεια διαίρεσης και τη δοκιμή της	Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι. Να γνωρίζουν την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης Να υπολογίζουν το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης δύο ακεραίων και να γράφουν την ισότητα αυτής Να κατανοούν ότι οι εκφράσεις: «Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ», «Ο δ είναι διαιρέτης του Δ», «Ο Δ διαιρείται από τον δ», είναι ισοδύναμες με την έκφραση: «Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με τον δ είναι τέλεια. Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τα κριτήρια διαιρετότητας με 2, 4, 5, 10 καθώς και με 3. 9. Να μπορούν να βρίσκουν το Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. δύο αριθμών Να αναλύουν δύο ή περισσότερους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρίσκουν με αυτό τον τρόπο το Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αυτών.	Διακρίνουν τους πρώτους από τους σύνθετους αριθμούς. Γνωρίζουν τις έννοιες «πολλαπλάσια» και «διαιρέτης». Γνωρίζουν πότε ένας αριθμός διαιρείται με: 2, 4, 5, 10, 25, 3, 9. Μπορούν να βρίσκουν το Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. δύο αριθμών.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Τα κριτήρια διαιρετότητας όπως και η ανάλυση ενός αριθμού σε παράγοντες στηρίζονται σημαντικά στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Ιδιαίτερα για τις περιπτώσεις της μη τέλειας διαίρεσης αναζητούνται τα κριτήρια διαιρετότητας που επιδιώκεται να εντοπιστούν από τους ίδιους τους μαθητές. ανακαλύπτονται από του ίδιους τους μαθητές.

Διδακτικές υποδείξεις

Κύριος στόχος του άξονα αυτού είναι η συστηματοποίηση και η εμπέδωση των σχετικών γνώσεων που οι μαθητές έχουν προσεγγίσει από το Δημοτικό.

Η μελέτη του πίνακα του πολλαπλασιασμού είναι βοηθητικός για την κατανόηση των παραγόντων ενός γινομένου και την διαιρετότητα των αριθμών ως το 100, που στηρίζει την κατανόηση και για μεγαλύτερους αριθμούς.

Η έννοια των πολλαπλασίων και των διαιρετών εισάγονται από την προηγούμενη ενότητα ενώ η αναγκαιότητα του Μ.Κ.Δ. και του Ε.Κ.Π. εισάγονται μέσω των προβλημάτων. Και για τις δύο περιπτώσεις η εύρεση γίνεται με αναγραφή των διαιρετών ή με την εύρεση των πολλαπλασίων, ώστε να επικεντρωθεί το ενδιαφέρον στην έννοια και όχι για την τεχνική εύρεσης.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Κριτήρια διαιρετότητας

Δραστηριότητα 1η

Χρωμάτισε στον πίνακα των αριθμών ως το 100, τα πολλαπλάσια του 2, του 3, του 4, του 5 και του 9. Τι παρατηρείς για κάθε περίπτωση;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Δραστηριότητα 2η

Μπορούν οι 246 μαθητές ενός σχολείου να παραταχθούν σε δυάδες, τριάδες, τετράδες πεντάδες και εξάδες χωρίς να περισσέψει κανένας; Σε ποιες περιπτώσεις μπορεί να γίνει η παράταξη και γιατί;

Δραστηριότητα 3η

Πόσα νομίσματα των 2, 5, 10, 25, 50, 100 € χρειαζόμαστε για ένα 500ευρω;

Δραστηριότητα 4η

Ποια συμπεράσματα βγάζεις από την 1η , 2η και 3η δραστηριότητα όταν έχεις να κάνεις διαίρεση με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 25, 50, 100.

2. Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Δραστηριότητα 5η

Κοίταξε στον πίνακα των αριθμών μέχρι το 100 και βρες ποιοι αριθμοί από το διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους.

3. Μ.Κ.Δ.

Δραστηριότητα 6η

Ένας ανθοπώλης έχει 150 κόκκινα, 180 ροζ και 240 άσπρα τριαντάφυλλα.

Πόσες ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να κατασκευάσει χρησιμοποιώντας όλα τα τριαντάφυλλα και κάθε ανθοδέσμη να έχει ίσο αριθμό από κόκκινα, ροζ και άσπρα τριαντάφυλλα;

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από ανθοδέσμες που μπορεί να κατασκευάσει και πόσα τριαντάφυλλα από κάθε χρώμα θα χρησιμοποιήσει;

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από ανθοδέσμες που μπορεί να κατασκευάσει και πόσα τριαντάφυλλα από κάθε χρώμα θα χρησιμοποιήσει;

Αναζητώντας πόσες ανθοδέσμες μπορεί να κατασκευάσει, τι πρέπει να βρείς;

4. Πολλαπλάσια και Ε.Κ.Π.

Δραστηριότητα 7η

Συμπληρώνοντας τον πίνακα βρες τα πολλαπλάσια του 4 και του 6. Βρες ποια από αυτά είναι κοινά και χρωμάτισε τα. Ποιο είναι το μικρότερο από αυτά;

Χ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4											
6											

Δραστηριότητα 8η

Κάνε το ίδιο για το 3, 6, 9

Χ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3											
6											
9											

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Να αναφέρεις όλους τους πρώτους αριθμούς κάτω από το 20.
2. Ποιοι από τους αριθμούς 612, 508, 1740,58632, 73614, διαιρούνται με το 3 και το 4 ταυτόχρονα;
3. Ο αριθμός 10 διαιρείται με τους αριθμούς 2 και 5. Τα πολλαπλάσια του 10 θα διαιρούνται με τους αριθμούς 2 και 10;
4. Μέτρα κατά εξάδες. Τι σχηματίζεις με αυτόν τον τρόπο;
5. Βρες σε τι ομάδες (δυάδες, τριάδες, κλπ.) μπορείς να χωρίσεις το 48. Τι σχηματίζεις με αυτό τον τρόπο;
6. Εξήγησε με παραδείγματα τι σημαίνει Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π.

- **Δεκαδικοί Αριθμοί και Πράξεις**

Γραφή – συμβολισμός – δεκαδικό σύστημα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να γράφουν και να ονομάζουν δ. αριθμούς και να περνούν από τη λεκτική στη συμβολική γραφή και αντίστροφα. Να διακρίνουν την διαφορετική αξία καθενός από τα ψηφία που σχηματίζουν έναν δ.α. Να γνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης (σύστημα θέσης) Να περνούν από ένα δ.α. σε ένα κλάσμα και αντίστροφα.	Να κατανοούν τους δ.α. ως αποτέλεσμα μετρήσεων Να μετατρέπουν ένα δεκαδικό κλάσμα σε δ.α. και αντιστρόφως. Να κατανοούν την έννοια του δεκαδικού κλάσματος ως δεκαδικού πηλίκου και να μπορούν να γράφουν ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό και ως ποσοστό Να αναγνωρίζουν την αξία των ψηφίων ενός δ.α.	Γράφουν και να ονομάζουν δ. αριθμούς και να περνούν από τη λεκτική στη συμβολική γραφή και αντίστροφα. Διακρίνουν την διαφορετική αξία καθενός από τα ψηφία που σχηματίζουν έναν δ.α. Μετατρέπουν ένα δ.α. σε δεκαδικό κλάσμα και αντίστροφα.

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Η ενότητα «δεκαδικοί αριθμοί» έχει επίσης επαναληπτικό χαρακτήρα, οπότε η διδακτική προσπάθεια και ο διαθέσιμος χρόνος θα εξαρτηθούν από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές.

Δεκαδικοί ονομάζονται οι αριθμοί που προκύπτουν από τα κλάσματα της μορφής α/10ν, ενώ ο αριθμός για παράδειγμα 4,333… = 13/3, είναι δεκαδική μορφή ρητού. Η σύγχυση της δεκαδικής μορφής και του δεκαδικού αριθμού είναι συνηθισμένη στους μαθητές. Οι δεκαδικοί αριθμοί προκύπτουν από την ανάγκη να επεκταθούν σε υποδιαιρέσεις οι φυσικοί και γενικότεροι οι ακέραιοι αριθμοί, ενώ η δεκαδική έκφραση προκύπτει από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων και τις λύσεις εξισώσεων (Brousseau, 1996).

Οι μαθητές γνωρίζουν τους φυσικούς αριθμούς και το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, ο στόχος της ενότητας αυτής είναι να επεκτείνουν αυτές τις γνώσεις στις υποδιαιρέσεις. Κατά συνέπεια, εξακολουθεί να έχει σημαντική διδακτική σημασία η αξία θέσης των ψηφίων των δεκαδικών και η τοποθέτηση τους στην ευθεία αριθμητική γραμμή. Έρευνες έχουν επισημάνει ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται συχνά τους δεκαδικούς ως φυσικούς με υποδιαστολή, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη της μορφής: ο επόμενος αριθμός του 6,5 είναι το 6,6. Για το λόγο προτείνονται δραστηριότητες που θέτουν σε αμφισβήτηση τις αντιλήψεις αυτές.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς οφείλονται κυρίως σε έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης της δεκαδικής φύσης του αριθμητικού συστήματος (Carpenter & Moser, 1984). Η μεταφορά γνώσεων από τους φυσικούς αριθμούς και η ελλιπής κατανόηση των υποδιαιρέσεων και της γραφής τους αποτελούν τις σημαντικότερες αιτίες των δυσκολιών τους.

Ωστόσο η μεταφορά κανόνων από τους φυσικούς αριθμούς και η εφαρμογή τους στους δεκαδικούς, παρά τα προβλήματα που ενδέχεται να δημιουργεί, μπορεί να είναι βοηθητική για την θεσιακή αξία των ψηφίων, αρκεί οι μαθητές να εισαχθούν σε αυτή με τον κατάλληλο τρόπο.

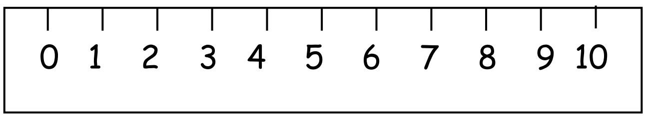
Διδακτικές υποδείξεις

Οι δεκαδικοί αριθμοί μπορούν να προκύψουν ως φυσική ανάγκη για υποδιαίρεση των φυσικών αριθμών, αρκεί την υποδιαίρεση αυτή να την πραγματοποιήσουν οι ίδιοι οι μαθητές σε μεγέθη όπου απαιτείται υποδιαίρεση σε δέκατα, εκατοστά ή χιλιοστά. Η θεσιακή αξία του δεκαδικού συστήματος μπορεί να υποστηρίξει τη γραφή των δεκαδικών, αρκεί να γίνεται σε συνδυασμό με τα κλάσματα, όπως και την τοποθέτησή των νέων αριθμών στην αριθμογραμμή. Η λεκτική έκφραση και η γραφή των δεκαδικών όπως και ο διαχωρισμός του ακεραίου από δεκαδικό μέρος αποτελούν στοιχεία που είναι απαραίτητο να αναδειχθούν από τις δραστηριότητες.

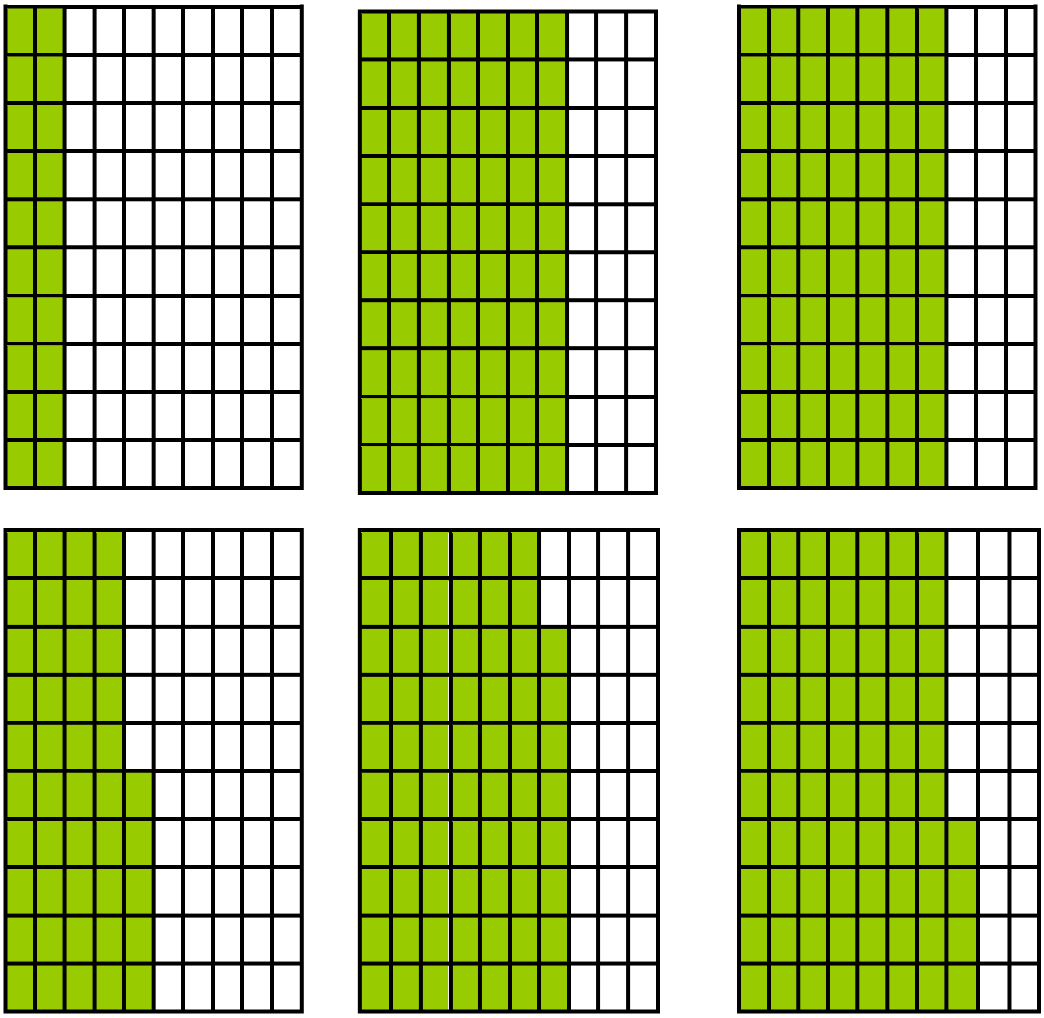
Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητες για την υποδιαίρεση

- Προτείνονται δραστηριότητες μέτρησης με ένα υποδεκάμετρο που δεν έχει υποδιαιρέσεις, όπως:

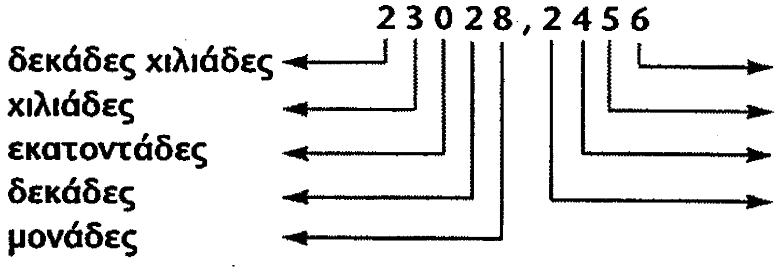


ώστε οι ίδιοι οι μαθητές να χωρίσουν τα δέκατα (π.χ. μέτρηση του ύψους τους).
- Προτείνονται υπολογισμοί με τις υποδιαιρέσεις του Ευρώ (εκατοστά).
- Προτείνονται υπολογισμοί με υποδιαιρέσεις του κιλού (χιλιοστά)
- Προτείνονται υποδιαιρέσεις ποσοτήτων σε 10, 100 και 1000 μέρη.
- **Προτε**ίνονται τα σχήματα για την εύρεση των δεκαδικών:



Δραστηριότητα 1η

Στον παρακάτω αριθμό, η υποδιαστολή χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος. Συμπλήρωσε το σχήμα:



Δραστηριότητα 2η

Τοποθέτησε τους αριθμούς στον πίνακα των δεκαδικών:

χιλιάδες	Εκατοντά δες	δεκάδες	μονάδες ,	δέκατα	εκατοστά	χιλιοστά

15 23,4 5,67 0,891 756,96 78,379 34, 902 1056, 430
23,457 1256,34 2,2057 789,9602 45,0576

Δραστηριότητα 3η

Τοποθέτησε τους αριθμούς στον πίνακα των δεκαδικών κλασμάτων και στη συνέχεια γράψε τα αντίστοιχα κλάσματα:

χιλιάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες,	δέκατα	εκατοστ ά	χιλιοστ ά
x 1000	x 100	x 10		1/10	1/100	1/100

6/10 96/10 4509/10 35/100 6785/100 135/1000 12065/1000
0,9 0,99 0,999 0,9999 12,35 12,467 12,2435 341,276

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Βρες σε ποιο δεκαδικό αντιστοιχεί η ανάλυση:

2. 1000+ 4.10 + 5 + 7.0,1+3.0,01 + 8.0,01

2405,038
2450,308
2045,38

2. Βρες σε ποιο δεκαδικό αντιστοιχεί η ανάλυση:

4. 100+ 5.10 + 2.1/10+6.1/100 + 9.1/1000

405,269
450,269
450,629

Σύγκριση – Διάταξη –Στρογγυλοποίηση – νοεροί υπολογισμοί		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να συγκρίνουν δύο δεκαδικούς αριθμούς και χρησιμοποιούν τα σύμβολα σύγκρισης. Να διατάσσουν δ.α. από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, και αντίστροφα.	Να στρογγυλοποιούν δ.α. Να αντιστοιχούν τους δ.α. με σημεία του άξονα	Διατάσσουν δ.α. από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, και αντίστροφα. Στρογγυλοποιούν δ.α.

Να χρησιμοποιούν δεκαδικούς αριθμούς για να εντοπίζουν θέσεις στην αριθμογραμμή Να στρογγυλοποιούν δ.α. και κάνουν νοερές πράξεις με εκτιμήσεις Να μπορούν να χρησιμοποιούν τον υπολογιστή τσέπης για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων	Να συγκρίνουν δ.α. Να εκτελούν πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης.	Τοποθετούν τους δ.α στην αριθμογραμμή Εκτελούν πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

Διδακτικές υποδείξεις

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, η τοποθέτηση των δεκαδικών στην αριθμογραμμή τους βοηθάει να κατανοήσουν την αξία τους, να τους συγκρίνουν και να τους διατάξουν. Τους στηρίζει επίσης να ενοποιήσουν το σύνολο των αριθμών.

Οι συγκρίσεις μετρήσεων και κυρίως σε οικείες καταστάσεις δίνει νόημα στην αξία των δεκαδικών αριθμών.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

Μέτρησε το ύψος σου σε μέτρα και γράψε τον στον πίνακα. Σύγκρινε το με των συμμαθητών σου.

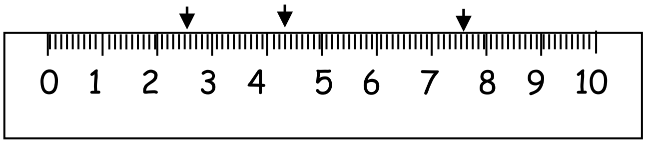
Στρογγυλοποίησε τα ύψη ώστε να έχουν ένα δεκαδικό ψηφίο.

Δραστηριότητα 2η

Τοποθέτησε τους αριθμούς στην αριθμογραμμή:

1, 3   3, 8   6, 75   9,95

Δραστηριότητα 3η



Βρες τους αριθμούς που υποδεικνύονται. Σε ποιους ακέραιους αριθμούς είναι κοντινότερα;

Δραστηριότητα 4η

- Σε ένα μανάβικό η τιμή που αναγράφεται είναι 2,3 ενώ στο διπλανό 2,30 €. Ποια τιμή είναι μεγαλύτερη;
- Το ύψος ενός παιδιού είναι 1,7 και του φίλου του 1,75. Ποιος είναι ψηλότερος;
- Ένα σακί πατάτες είναι 4,60 κιλά και το διπλανό τους 4,600 κιλά. Ποιο είναι βαρύτερο;

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Πόσο διαφέρουν οι αριθμοί

158,00 και 158
2,4 και 2,45
7,8 και 7,92
5,30 και 5,375

2. Γράψτε 3 αριθμούς ανάμεσα στους:

4,1 και 4,2

6,73 και 6,74

2,68 και 2,69

Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να εκτελούν πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις φυσικών και δεκαδικών αριθμών Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων και λύνουν σύνθετα προβλήματα τεσσάρων πράξεων	Να εκτελούν πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς Να εκτελούν τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα (με τη βοήθεια ή μη του υπολογιστή τσέπης) Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων και να τις χρησιμοποιούν στον της τιμής αριθμητικών παραστάσεων	Εκτελούν πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς Εκτελούν τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Οι πράξεις με τους δεκαδικούς αριθμούς, εκτός από τον επαναληπτικό τους χαρακτήρα, δεν εμφανίζουν ιδιαιτερότητες στο βαθμό που η έννοια των δεκαδικών αριθμών και η σχέση τους με τους φυσικούς και τα κλάσματα έχουν κατανοηθεί. Αν και τα παλαιότερα χρόνια δίνονταν μεγάλη σημασία στους μηχανισμούς και τους αλγόριθμους των πράξεων, στη σημερινή εποχή μεγαλύτερη σημασία έχει η απόκτηση αίσθησης των αριθμών και η εκτιμητική ικανότητα των μαθητών. Στη ενότητα αυτή επιδιώκεται, με τη βοήθεια των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών, να προχωρήσουν οι μαθητές σε πράξεις, κυρίως σε καθημερινές καταστάσεις και να χρησιμοποιήσουν την αριθμομηχανή για να επιβεβαιώσουν τις εκτιμήσεις που έχουν κάνει.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές μεταφέρουν και στις πράξεις τις προηγούμενες γνώσεις τους από τους φυσικούς, γεγονός που είναι βοηθητικό για την εκτέλεση των πράξεων αλλά οδηγεί σε λάθη σε σχέση με την υποδιαστολή. Συχνά κάνουν προσθέσεις ή αφαιρέσεις αγνοώντας την αξία θέσης των ψηφίων και πολλαπλασιασμούς μπερδεύοντας τη θέση της υποδιαστολής. Είναι σημαντικό να ενισχυθούν οι κατά προσέγγιση υπολογισμοί που θα τους βοηθήσουν να ξεπεράσουν τις δυσκολίες αυτές.

Διδακτικές υποδείξεις

Οι υπολογισμοί με χρήματα και άλλοι υπολογισμοί σε πραγματικές καταστάσεις με αριθμούς με διαφορετικά δεκαδικά ψηφία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τις εκτιμήσεις και την προσέγγιση.

Για την υποστήριξη των αλγορίθμων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας των δεκαδικών από την προηγούμενη ενότητα.

Στον πολλαπλασιασμό όπως και τη διαίρεση ξεκινάμε με προβλήματα πράξεων δεκαδικών και ακεραίων όπου οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τον αθροιστικό χαρακτήρα του πολλαπλασιασμού και συνεχίζουμε με συγκρίσεις πολλαπλασιασμών που έχουν τους ίδιους αριθμούς αλλά διαφορετική θέση στην υποδιαστολή (πιθανόν και με την αριθμομηχανή) για να γίνει αντιληπτός ο ρόλος των δεκαδικών στον υπολογισμό του αποτελέσματος. Αντίστοιχες πράξεις προτείνονται και στην διαίρεση. Οι αλγόριθμοι ή οι μηχανιστικοί κανόνες είναι απαραίτητο να προκύψουν από τους ίδιους τους μαθητές.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1η

Η Μαρία αγόρασε από το βιβλιοπωλείο ένα μπλοκ που κόστιζε 3 € και 5 λεπτά και ένα ντοσιέ που κόστιζε 4 € και 35 λεπτά. Πόσα χρήματα πλήρωσε συνολικά;

Δραστηριότητα 2η

Ο μανάβης της γειτονιάς αγόρασε από τη λαχαναγορά πατάτες. Την πρώτη φορά πήρε 5 κιλά και 75 γραμμάρια, ενώ τη δεύτερη 7 κιλά και 785 γραμμάρια. Πόσο βάρος έχουν οι πατάτες που αγόρασε συνολικά;

Δραστηριότητα 3η

Βάλε στον πίνακα τους αριθμούς 205, 63 και 45, 305. Δοκίμασε να υπολογίσεις το αποτέλεσμα με το νου και στη συνέχεια κάνε την πρόσθεση κι επιβεβαίωσε.

χιλιάδες	Εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες ,	δέκατα	εκατοστά	χιλιοστά

Δραστηριότητα 4η

Έχεις 3 μπουκάλια πορτοκαλάδας που η κάθε μία είναι 1, 8 λίτρα. Πόσα λίτρα πορτοκαλάδα έχει συνολικά; Αν τη μοίραζες σε 6 παιδιά πόσα λίτρα θα έπινε το κάθε ένα;

Δραστηριότητα 5η

Κάνε τους πολλαπλασιασμούς

4,45 X 3, 18 44,5 X 3,18 445 X 3,18 445 X 31, 8

Βγάλε ένα συμπέρασμα για το πολλαπλασιασμό των δεκαδικών αριθμών.

Δραστηριότητα 6η

Ένα παιδί προπονείται στην ποδηλασία. Αν σε 5 μέρες κάλυψε μια απόσταση 63,5 χιλιομέτρων, πόσο τρέχει κατά μέσο όρο κάθε μέρα;

Δραστηριότητα 7η

Αν ένα παιχνίδι στοιχίζει 22,5€, πόσες δωροεπιταγές των 3, 75€ σου χρειάζονται για να το πάρεις;

Δραστηριότητα 8η

Κάνε τη διαίρεση του 56,68 δια 4 και στη συνέχεια στη διαίρεση του 566,8 δια 4. Βγάλε ένα συμπέρασμα για τη διαίρεση των δεκαδικών αριθμών.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Σχηματίστε ένα πρόβλημα που να αναφέρεται στην πρόσθεση : 2,7 + 3,5

2. Υπολόγισε τα αποτελέσματα

5,17 . 10 και 5,17 : 10 703,45 . 100 και 703,45 : 100

3. Ποιος είναι μικρότερος και ποιος μεγαλύτερος από τους αριθμούς:

6 . 0,3 0,6 . 0,3 6:3 6:0,3 0,6 : 0,3

Έννοια της δύναμης - Συμβολισμός – Δυνάμεις του 10		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να κατανοήσουν την έννοια της δύναμης να και να μπορούν να διαβάζουν δυνάμεις. Να υπολογίζουν δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό (με τη βοήθεια ή μη υπολογιστή τσέπης). Να εφαρμόζουν την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό παραστάσεων με δυνάμεις και παρενθέσεις.	Κατανοούν την έννοια των τετράγωνων και κυβικών αριθμών Γράφουν αριθμούς σε τετράγωνα και κύβους. Υπολογίζουν αριθμούς με μεγαλύτερες δυνάμεις (με τη βοήθεια ή μη υπολογιστή τσέπης). Κάνουν πράξεις σε παραστάσεις με δυνάμεις του 2 και του 3.
Να μπορούν να γράψουν τους αριθμούς 10, 100, 1000 κτλ. με τη μορφή δυνάμεων του 10.	Να γράφουν πολύ «μεγάλους» αριθμούς με τυποποιημένη μορφή	Μπορούν να γράψουν τους αριθμούς 10, 100, 1000 κτλ. με τη μορφή δυνάμεων του 10.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Η έννοια της δύναμης εισάγει ένα οικονομικό τρόπος αναγραφής του πολλαπλασιασμού. Κατά συνέπεια οι μαθητές μπορούν να ασκηθούν στον υπολογισμό μιας δύναμης αλλά και αντίστροφα στην μετατροπή ενός αριθμού σε δύναμη (για κατάλληλους και προσιτούς ακεραίους αριθμούς).

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν τη συμβολική μορφή της δύναμης αν δεν την έχουν δημιουργήσει με τις δικές τους πράξεις, αλλά κυρίως δεν κάνουν την αντίστροφη πράξη, για παράδειγμα «το 49 ποιού αριθμού είναι το τετράγωνο;». Για το λόγο αυτό προτείνονται δραστηριότητες στον πίνακα του πολλαπλασιασμού που τους βοηθούν να κάνουν τις συνδέσεις δυνάμεων και αποτελεσμάτων, τουλάχιστον για τα τετράγωνα.

Οι υπολογισμοί με τον υπολογιστή τσέπης είναι επίσης βοηθητικοί.

Διδακτικές υποδείξεις

Στην ενότητα αυτή, δεδομένου ότι η δύναμη είναι ένας πολλαπλασιασμός που μπορούν οι μαθητές να κάνουν με ευκολία, επιδιώκουμε κυρίως τη σύνδεση στην αντίληψή τους, των δυνάμεων και των αποτελεσμάτων. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να συνδέσουν τους τετράγωνους και τους κυβικούς αριθμούς με τα αντίστοιχα σχήματα, που θα τους επιτρέψει αργότερα να κατανοούν και την έννοια του $α^2$, όπως και να υπολογίζουν μεγαλύτερες δυνάμεις με την αριθμομηχανή.

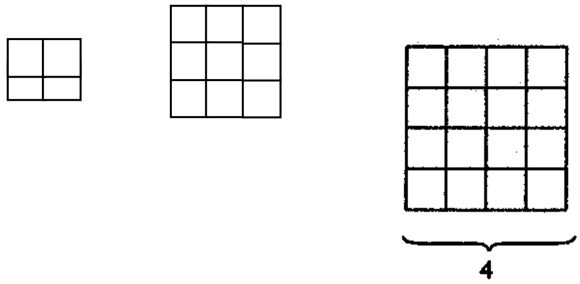
Δραστηριότητα 1η

Χρωμάτισε στον πίνακα του πολλαπλασιασμού όλα τα γινόμενα της μορφής πχ. 2Χ2, 3Χ3, κλπ. Τι παρατηρείς

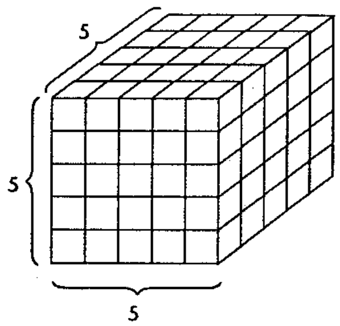
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	26
5	3	10	15	20	35	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Δραστηριότητα 2^{η}

Δημιούργησε τετράγωνα με πλευρά 2, 3 κπλ. Πόσες τετραγωνικές μονάδες είναι η επιφάνειά τους;



Κάνε το ίδιο με κύβους. Πόσες κυβικές μονάδες είναι ο όγκος τους;



Δραστηριότητα 3^{η}

Να συμπληρώσεις τον πίνακα με τα τετράγωνα, τους κύβους και τα τριπλάσια των αριθμών:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a											
a^2											
a^3											
$3a$											

Προφορικές και νοερές δραστηριότητες

Με νοερούς υπολογισμούς

- Υπολόγισε το τετράγωνο και τον κύβο του αριθμού 3, του 5 και του 10.
- Ποιού αριθμού είναι δύναμη το 36, το 49, το 81;
- Υπολόγισε τις 5 πρώτες δυνάμεις του 10. Τι παρατηρείς.

Δραστηριότητα 4η

Η απόσταση της Γης από τον Ήλιο είναι περίπου 150.000.000 χιλιόμετρα.
Γράψε τον αριθμό αυτό ως γινόμενο ενός ακεραίου και μιας δύναμης του 10.

Δραστηριότητα 5η

Γράψε τους παρακάτω αριθμούς ως γινόμενα ενός δεκαδικού που έχει ένα ακέραιο ψηφίο, και ενός από τους αριθμούς 10, 100, 1000, ...

- 340 =
- 567000000 =
- 45000000000 =
- 789000 =

Στη συνέχεια, στα γινόμενα αυτά, μετάτρεψε το 10, 100, 1000, ... σε δυνάμεις του 10.

Δραστηριότητα 6η

Γράψε στην ίδια μορφή τους αριθμούς:

- Απόσταση Γης - Σελήνης 384400 km
- Μάζα της Γης 5976000000000000000000000 kgr
- Μάζα του Ήλιου 1983000000000000000000000000000 kgr
- Ηλικία της Γης 4500000000 έτη

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Υπολόγισε τις πρώτες 5 δυνάμεις του αριθμού 2.
2. Βρες τα τετράγωνο των αριθμών 11, 12, 13 και 14.
3. Για να βρεις τον αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι 225, ποιους αριθμούς θα δοκίμαζες;
4. Υπολόγισε το 1^{1000}
5. Γράψε τις δυνάμεις τους 10 και αντιστοίχησε στον παρακάτω πίνακα:

	δύναμη	αποτέλεσμα
τετράγωνου του 10		1.000
κύβος του 10		1.000.000
10 στην τετάρτη		10.000
10 στην πέμπτη		100
10 στην έκτη		100.000

- **Κλασματικοί αριθμοί και Πράξεις**

Έννοια του κλάσματος		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να κατανοούν την έννοια του κλάσματος. Να διακρίνουν και να δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα	Να κατανοούν την έννοια του κλάσματος. Να κατανοήσουν την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων	Χρησιμοποιούν την έννοια του κλάσματος. Διακρίνουν και δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών:

Ένα κλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως:

1. Μέρος - όλου (Part-Whole)
2. Πηλίκο διαίρεσης (Quotient)
3. Λόγος (Ratio)
3. Σημείο αριθμογραμμής (Measuring number)
6. Διατεταγμένο ζεύγος (Ordered pair)

Αν και η εισαγωγική θεώρηση του κλάσματος ως "μέρος του όλου" υποστηρίζεται από διάφορους ερευνητές (π.χ. Kieren,1988, Behr,1983), δεν καλύπτει εννοιολογικά τη σημασία και τη χρήση του κλάσματος. Για το λόγο αυτό ενθαρρύνονται και οι άλλες προσεγγίσεις της έννοιας, ιδιαίτερα ο λόγος και το κλάσμα ως πηλίκο διαίρεσης που χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές.

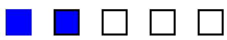
Δυσκολίες των μαθητών

Η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος συνδέεται με την προσέγγιση του μέσα από τις διαφορετικές καταστάσεις που δίνουν το νόημά του, την αντίληψη της ισοδυναμίας όπως και την ένταξή του στο σύνολο των αριθμών. Οι μαθητές γνωρίζουν τους φυσικούς, όπως και τους δεκαδικούς αριθμούς ως υποδιαιρέσεις, γνωρίζουν επίσης ότι κάθε αριθμός έχει μία αξία και για το λόγο αυτό δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν το κλάσμα ως μία παράσταση ενός αριθμού κι ακόμα περισσότερο να κατανοήσουν ότι πολλά κλάσματα έχουν την αριθμητική αξία.

Στην κατασκευή του νοητικού σχήματος «μέρος-όλο» οι δυσκολίες συνδέονται με την αναγνώριση και τη φύση του «όλου» και των «μερών» και του τρόπου χωρισμού, όπως και τη σύνδεση αυτού του μοντέλου με άλλες καταστάσεις του κλάσματος.

Επίσης, στην περίπτωση των διακριτών μέσων, μπορεί διαφορετικά μέρη να αποτελούν το αντίστοιχο μέρος ενός συνόλου, όπως για παράδειγμα στη διάταξη:

δύο μπλε τετραγωνάκια αποτελούν τα $\frac{2}{5}$ του όλου των τετραγώνων,



αλλά και στη διάταξη:

τα τέσσερα μπλε τετραγωνάκια αποτελούν πάλι τα $\frac{2}{5}$ του όλου των τετραγώνων, αν και στην αντίληψη των μαθητών, μέσα από αυτή την κατασκευή, αποτελούν διαφορετικά κλάσματα, 2/5 και 4/10.

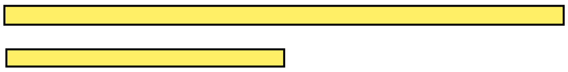
Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις:

Βασική προϋπόθεση για την κατανόηση του μοντέλου «μέρους- όλου» στην εισαγωγική προσέγγιση των κλασμάτων αποτελεί η χρήση του σωστού πλήθους των - ίσων μεταξύ τους- τμημάτων που συνθέτουν το όλο, Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται όλα τα σχετικά μοντέλα (εμβαδού, γραμμικό, συνόλου).

Ωστόσο, παρά τον κεντρικό ρόλο του μοντέλου αυτού για την κατανόηση των κλασμάτων, η υπερβολική έμφαση ενδέχεται να δημιουργήσει προβλήματα στους μαθητές να «δούνε» το κλάσμα σαν αυθύπαρκτο αριθμό (Haenish,1985 ; Mack,1993).

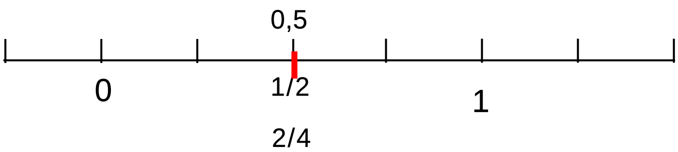
Γι' αυτό θα πρέπει να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να αντιμετωπίζουν το κλάσμα και ως *πηλίκο* (Ποσότητα α που κατανέμεται ισομερώς σε β μέρη) ή ως *διαίρεση (μερισμού* και *μέτρησης).* Για παράδειγμα: «Πόσο θα πάρει καθένας από τρεις συμμαθητές όταν μοιράσουν δίκαια δώδεκα πίτσες;» και «Πόσοι μαθητές μπορούν να φάνε δώδεκα πίτσες αν κάθε μαθητής παίρνει από τέσσερα κομμάτια πίτσας;»

Τέλος είναι σημαντικό να παρουσιάζεται το κλάσμα ως *λόγος* σε σύνδεση με το μοντέλο μέρος- όλου, που στηρίζει τη σύγκριση μεγεθών.



Αντίστοιχα προβλήματα λόγου εξοικειώνουν με αυτή τη μορφή όπως για παράδειγμα «Σε ένα παιχνίδι, 5 μαθητές κερδίζουν 4 ευρώ και 8 μαθήτριες 7 ευρώ. Ποιος θα πάρει πιο πολλά χρήματα;»

Τέλος η τοποθέτηση των κλασμάτων πάνω στην αριθμητική γραμμή βοηθούν τους μαθητές να συνδέσουν το κλάσματα με τους άλλους αριθμούς όπως και να κατανοήσουν την έννοιας της ισοδυναμίας.

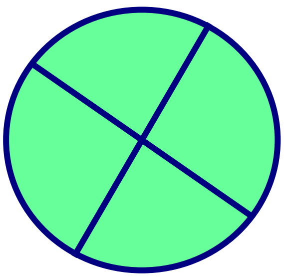


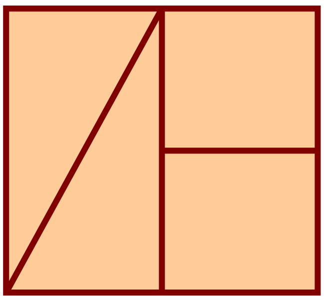
Ενδεικτικές προφορικές και νοερές δραστηριότητες:

- Μια εβδομάδα χωρίζεται σε 7 ίσα χρονικά διαστήματα. Πως ονομάζουμε κάθε ένα από αυτά τα χρονικά διαστήματα; Τι μέρος της εβδομάδας είναι;
- Τι μέρος ενός μήνα 30 ημερών είναι κάθε ένα από αυτά τα χρονικά διαστήματα; Αν ένας μαθητής απουσίασε 2 μέρες μιας εβδομάδας από το σχολείο, τι μέρος της σχολικής εβδομάδας έχασε μαθήματα;

Δραστηριότητα 1η

Τι μέρος της πράσινης πίτσας και τι μέρος της τετράγωνης τούρτας είναι κάθε ένα από τα 4 κομμάτια στα οποία τις έχουμε χωρίσει;

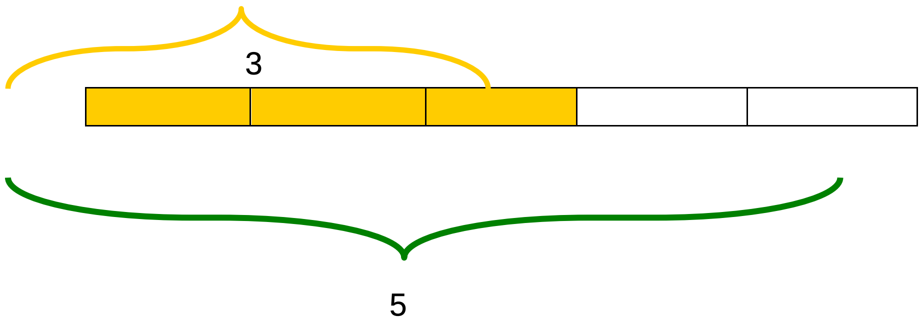




Γράψτε με κλάσμα τα μέρη.

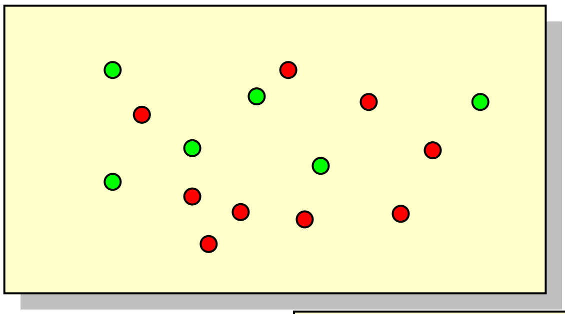
Δραστηριότητα 2η

Τι μέρος της ράβδου είναι το κίτρινο κομμάτι της; Γράψτε με κλάσμα το μέρος αυτό.



Δραστηριότητα 3η

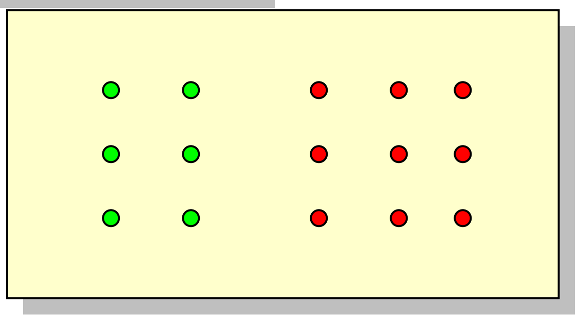
- Στο παρακάτω σχήμα, χωρίστε τις πράσινες από τις κόκκινες σφαίρες:



- Τι μέρος των σφαιρών είναι :

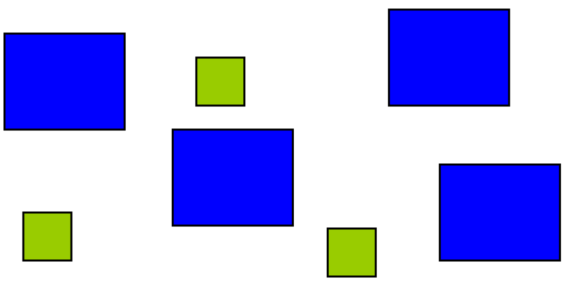
Α. Οι πράσινες σφαίρες;

Β. Οι κόκκινες σφαίρες;



Δραστηριότητα 4η

Κόψε πράσινα (μικρότερα) και μπλε (μεγαλύτερα) τετράγωνα φύλλα χαρτιού. Αντικατέστησε τις λέξεις **μέρος** και **όλο** με αριθμούς και πρότεινε τρόπους για να διαβάσεις το κλάσμα.



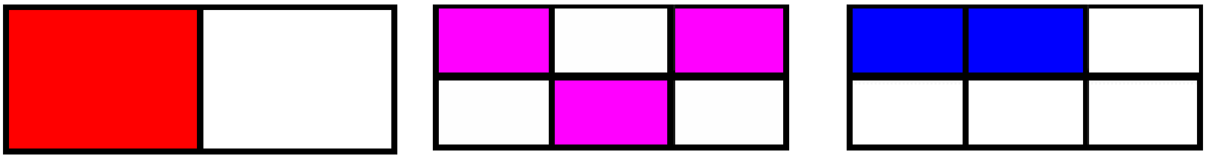
Μέρος

= -----------------

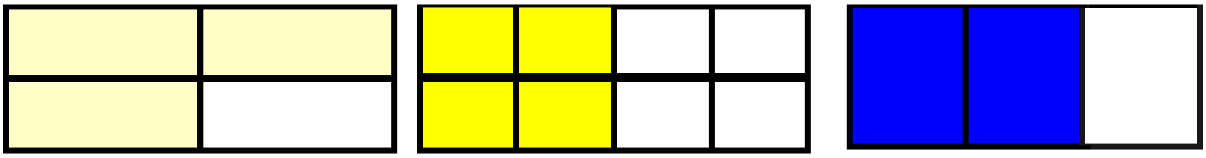
Όλο

Δραστηριότητα 5η

Στα παρακάτω σχήματα, γράψε το κλάσμα που αντιστοιχεί σε καθένα από στις ζωγραφισμένες περιοχές:



____	____	____
2	6	6

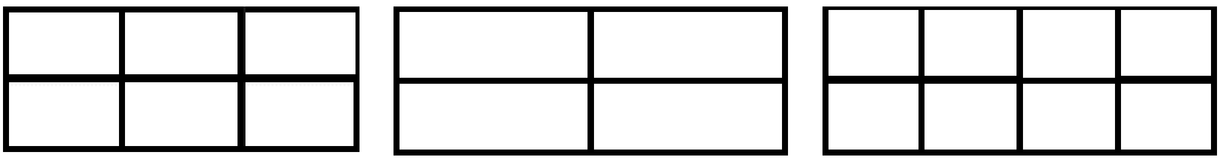


____	____	____
4	8	3

____	____	____
8	2	4

Δραστηριότητα 6η

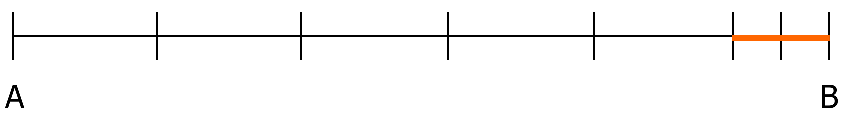
Στα παρακάτω σχήματα, ζωγράφισε τις περιοχές που αντιστοιχούν στα σημειωμένα κλάσματα σε κάθε περίπτωση:

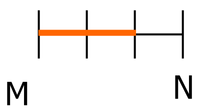


$\frac{5}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{8}$

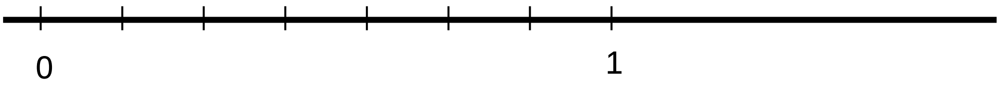
Δραστηριότητα 7η

Πόσες φορές χωράει η μονάδα μέτρησης ΜΝ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ;





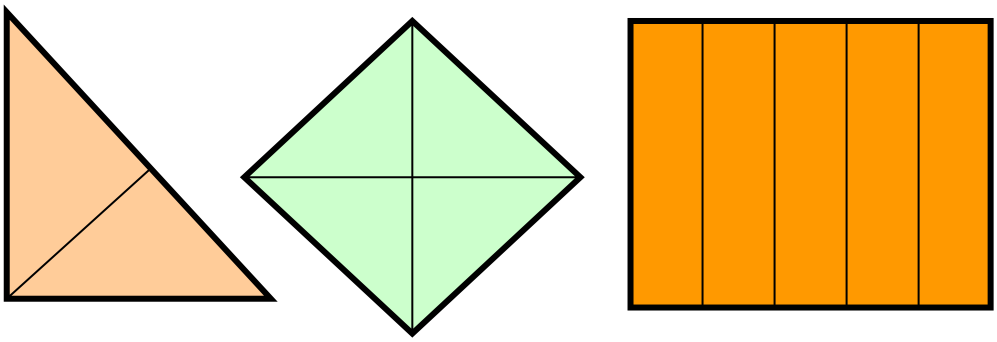
Δραστηριότητα 8η:
Σημειώστε στην παρακάτω αριθμογραμμή



τα σημεία που αντιστοιχούν στα κλάσματα: $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{3}{3}$, 0 , $\frac{8}{7}$

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Διάβασε τα κλάσματα: $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{7}, \frac{5}{3}$
2. Γράψτε τα κλάσματα: τρία έβδομα, δύο όγδοα, ένα τέταρτο και έξι πέμπτα.
8. Σχημάτισε ένα πρόβλημα που να αναφέρεται σε ένα κλάσμα.
9. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, γράψε ένα κλάσμα για: σχήματος



-

Κάθε ένα από τα μέρη στα οποία χωρίζονται.
- Δύο από τα μέρη στα οποία χωρίζονται.
- Στα (α) και (β) σχήματα, τρία από τα μέρη στα οποία χωρίζονται.
- Στο σχήμα (γ), τέσσερα από τα μέρη στα οποία χωρίζεται.

Γράψε επίσης ένα κλάσμα για το σχήμα (α) σε σχέση με το σχήμα (β).

Ισοδυναμία - Ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να δημιουργούν και να διακρίνουν ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα Να μετατρέπουν ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα Να απλοποιούν κλάσματα	Να μετατρέψουν κλάσματα σε ομώνυμα Να χρησιμοποιούν τη «χιαστί» ιδιότητα για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων	Διακρίνουν τα ισοδύναμα κλάσματα. Μετατρέπουν κλάσματα σε ομώνυμα. Απλοποιούν κλάσματα. Ελέγχουν με χιαστί πολ/σμό.

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών:

Η ισοδυναμία είναι βασική έννοια για το μετασχηματισμό ετερωνύμων κλασμάτων σε ομώνυμα και αποτελεί τη πιο σημαντική διάσταση της έννοιας του κλάσματος. Εκτός από την προσέγγισή της μέσα από το νοητικό σχήμα «μέρος-όλου», είναι απαραίτητο να συνδεθεί με την τοποθέτηση των ισοδυνάμων κλασμάτων πάνω στην αριθμητική γραμμή που επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν τα ισοδύναμα κλάσματα ως μορφές του ίδιου (ρητού) αριθμού, ενώ παράλληλα ενοποιούν τους κλασματικούς με τους δεκαδικούς και φυσικούς αριθμούς. το σύνολο των αριθμών.

Δυσκολίες των μαθητών

Η κατασκευή της ισοδυναμίας κλασμάτων γίνεται μέσω των σχημάτων του κλάσματος που έχουμε ήδη περιγράψει, άρα συνδέεται στενά με την έννοια του κλάσματος, αλλά αποτελεί μια ιδιαίτερη δύσκολη έννοια για τους μαθητές,

Συχνά θεωρείται ότι ο μοντέλο «μέρος- όλο» και τα σχήματα που χρησιμοποιούνται σε αυτό μπορούν να καλύψουν αυτές τις δυσκολίες των μαθητών στην αντίληψη της ισοδυναμίας, αλλά το μοντέλο αυτό δεν καλύπτει εννοιολογικά την έννοια. Πολύ περισσότερο μηχανιστικές παρουσιάσεις μετατροπής ετερώνυμων σε ομώνυμα κλάσματα δυσκολεύουν ακόμα περισσότερο τους μαθητές να προσεγγίσουν το νόημα τις ισοδυναμίας. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται δραστηριότητες που επιτρέπουν τους μαθητές να προσεγγίσουν οι ίδιοι το νόημα αυτό.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Η αναγνώριση, η διάκριση και η δημιουργία ισοδυνάμων κλασμάτων προϋποθέτει τόσο τη χρήση κατάλληλων οπτικών μοντέλων, όσο και τη δυνατότητα κατάλληλης χρήσης του πίνακα πολλαπλασιασμού, καθώς και τη γνώση και χρήση της ιδιότητας *« Η αξία ενός κλάσματος δεν μεταβάλλεται όταν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους του με τον ίδιο αριθμό που δεν είναι μηδέν»*, στο συμβολικό επίπεδο.

Η κατανόηση των ισοδυνάμων κλασμάτων μπορεί να στηριχτεί σε μοντέλα εμβαδού και σε γραμμικά μοντέλα που αφορούν σε συνεχή ή διακριτά μέσα. Ειδικότερα, το κουτί κλασμάτων (*Δραστηριότητα 3 - Stein, 1996),* θεωρείται ότι μπορεί, σε συνδυασμό με την αριθμογραμμή, να χρησιμοποιηθεί με θετικά αποτελέσματα για την κατασκευή της εννοίας των ισοδυνάμων κλασμάτων.

Επειδή οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τον πίνακα πολλαπλασιασμού και γενικότερα με τις πράξεις, πρέπει να επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής, για να μην εμποδιστεί η αντίληψη της ισοδυναμίας από τις δυσκολίες στις πράξεις.

Για να αποφευχθούν επίσης άλλες δυσκολίες, δεν παρουσιάζονται πολλά κλάσματα μαζί, όπως και κλάσματα με μεγάλους αριθμούς. Η γνώση και η εμπειρία που μπορεί να κατακτηθεί από τους μαθητές με μικρότερα κλάσματα, μπορεί να γενικευθεί πιο εύκολα στα μεγαλύτερα.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Δραστηριότητα 1η

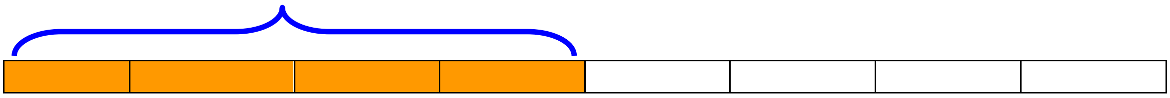
Στους τρεις ίδιους κύκλους που είναι σχεδιασμένοι:

- Χρωμάτισε το μέρος του πρώτου κύκλου που είναι το ένα δεύτερο.
- Χρωμάτισε το μέρος του δεύτερου κύκλου που είναι τα δύο τέταρτα;
- Χρωμάτισε το μέρος του τρίτου κύκλου που είναι τα τέσσερα όγδοα;
- Σύγκρινε τα τμήματα που έχεις χρωματίσει στους τρεις κύκλους. Σύγκρινε επίσης τα αντίστοιχα κλάσματα. Τι διαπιστώνεις;

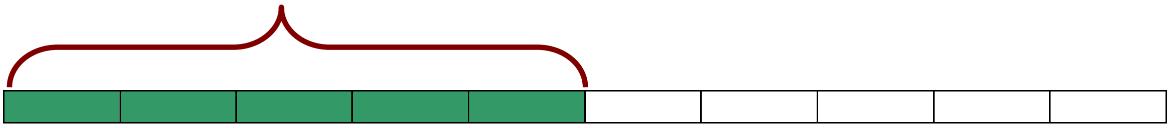
Δραστηριότητα 2η

Στις παρακάτω ράβδους βρες, χρωμάτισε, ονόμασε και συμβόλισε το μισό τους. Τι παρατηρείς;

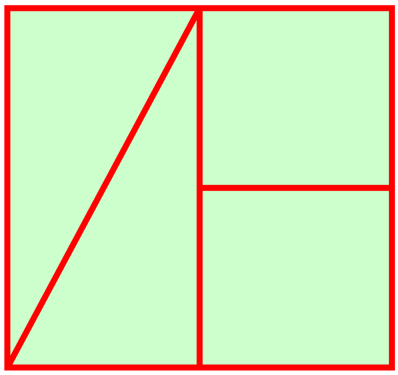
4/8 (Μισό)



5/10 (Μισό)



Δραστηριότητα 3η

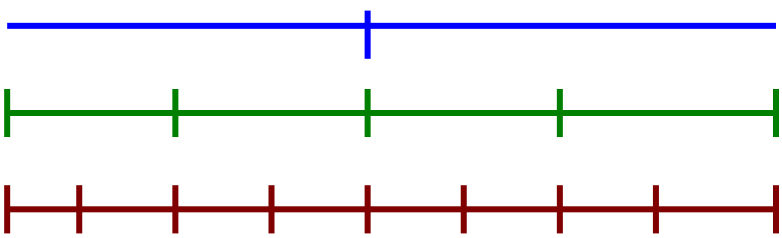


Τι μέρος της τετράγωνης πίτσας είναι:
- Ένα τριγωνικό κομμάτι;
- Δύο τριγωνικά κομμάτια;
- Ένα τετραγωνικό κομμάτι;
- Δύο τετραγωνικά κομμάτια;

- Αν κάποιος έχει φάει ένα τριγωνικό κι ο φίλος του ένα τετραγωνικό κομμάτι ποιος έχει φάει πιο πολύ;
- Αν κάποιος έχει φάει δύο τριγωνικά κι ο φίλος του δύο τετραγωνικά κομμάτια, πόσο μέρος της πίτσας έχει φάει ο κάθε ένας;
- Αν κάποιος έχει φάει τη μισή πίτσα κι ο φίλος του ένα τριγωνικό και ένα τετραγωνικό κομμάτι, πόσο μέρος της πίτσας έχει φάει ο κάθε ένας;

Δραστηριότητα 4η

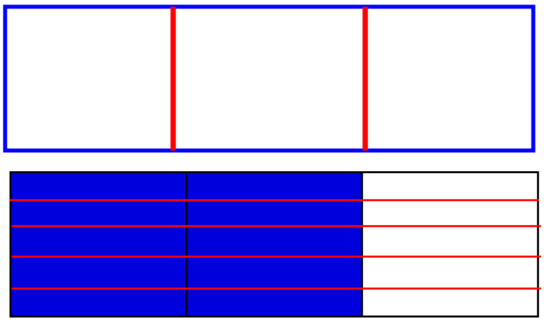
Στα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα, να αναγνωρισθούν τα κλάσματα 1/2 , 2/4 και 4/8. Τι μέρος του ευθύγραμμου τμήματος εκφράζουν; Πώς ονομάζουμε αυτά τα κλάσματα;



Δραστηριότητα 5η

- Χώρισε το παρακάτω ορθογώνιο με κατακόρυφες γραμμές σε τρία ίσα κομμάτια και χρωμάτισε τα δύο. Τι μέρος του αρχικού ορθογωνίου είναι αυτό που χρωμάτισες; Γράψε ένα κλάσμα.
- Χώρισε τώρα το ορθογώνιο με οριζόντιες γραμμές σε 5 ίσα κομμάτια. Σε πόσα κομμάτια έχει χωριστεί το αρχικό ορθογώνιο; Από πόσα τέτοια κομμάτια αποτελούνται τα προηγούμενα

κομμάτια που έχεις ζωγραφίσει; Γράψε ένα κλάσμα. Το κλάσμα αυτό είναι ίδιο με το προηγούμενο; Γιατί; Τι συμπεραίνεις;



Δραστηριότητα 6η

Στο παρακάτω κουτί των κλασμάτων έχουν βρεθεί και σημειωθεί μερικά κλάσματα. Να συμπληρώσεις τα άδεια κουτιά χωρίζοντας τα σε τόσα κουτιά, όσα υποδεικνύεται κάθε φορά. Για παράδειγμα, στο κουτί που γράφει $\frac{1}{5}$ να χωρίσεις το κάθε κουτί σε πέντε (5) κουτιά ίδια. Ανάλογα για τα υπόλοιπα κενά κουτιά.

- Βρες, χρωμάτισε και γράψε όσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{2}$
- Βρες, χρωμάτισε και γράψε όσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{3}$
- Βρες, χρωμάτισε και γράψε όσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με το $\frac{1}{4}$

Το κουτί των κλασμάτων

<table>
<tr><td colspan="12">1</td></tr>
<tr><td colspan="6">1/2</td><td colspan="6">1/2</td></tr>
<tr><td colspan="4">1/3</td><td colspan="4">1/3</td><td colspan="4">1/3</td></tr>
<tr><td colspan="3">1/4</td><td colspan="3">1/4</td><td colspan="3">1/4</td><td colspan="3">1/4</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/5</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/6</td><td colspan="2">1/6</td><td colspan="2">1/6</td><td colspan="2">1/6</td><td colspan="2">1/6</td><td colspan="2">1/6</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/7</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/8</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/9</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/10</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/11</td></tr>
<tr><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td><td>1/12</td></tr>
</table>

Δραστηριότητα 7η

Από τα παρακάτω κλάσματα, ξεχώρισε αυτά που έχουν ίδιους παρανομαστές:

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}, 2, \frac{2}{7}, \frac{7}{5}, \frac{13}{3}, \frac{7}{7}, 3, 1$$

Δραστηριότητα 8η

Να συμπληρώσεις τις ισότητες:

2.6=3.; , $\frac{2}{3} = \frac{;}{6}$

4.6=;.8 , $\frac{4}{8} = \frac{;}{6}$

Δραστηριότητα 9η

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

$\frac{3}{6}, \frac{12}{4}, \frac{24}{8}, \frac{120}{15}, \frac{9\alpha\beta}{3\alpha}$

Δραστηριότητα 10η

Α) 3.8=4.;

Β) Είναι ισοδύναμα τα κλάσματα: $\frac{3}{4}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{6}{8}$;

Γ) Ομοίως για τα κλάσματα: $\frac{2}{7}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{6}{21}$, $\frac{2}{5}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{9}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{16}{36}$

Ενδεικτικές προφορικές και νοερές δραστηριότητες:

- Διπλασίασε τους όρους του κλάσματος $\frac{2}{3}$. Τι βρήκες; Κάνε το ίδιο για το κλάσμα που βρήκες. Τι σχέση έχουν τα κλάσματα που βρήκες;

- Διάβασε τα κλάσματα: $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}$. Τι παρατηρείς;

- Κάνε το ίδιο για τα κλάσματα: $\frac{20}{30}, \frac{10}{15}, \frac{2}{3}$. Τι παρατηρείς;

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Αν τα αναπαραστήσουμε δύο ισοδύναμα κλάσματα σε μια αριθμογραμμή ποια θα είναι η θέση τους;
2. Πώς λέγονται δύο κλάσματα που δε είναι ομώνυμα;
3. Πως ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα;
4. Η Μαρία και ο Κώστας έχουν από 100 € ο καθένας. Η Μαρία ξοδεύει τα 4/5 των χρημάτων της και ο Κώστας τα 12/15 των χρημάτων του. Ποιος ξόδεψε περισσότερα;
5. Σχημάτισε ένα κλάσμα ισοδύναμο με το 9/12 που να έχει όρους:

- 3 φορές μικρότερους
- 4 φορές μεγαλύτερους

Σημείωση:

Στο στάδιο αυτό είναι δυνατό να μη ζητήσουμε από τους μαθητές να προσδιορίσουν το ισοδύναμο ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ λύνοντας την εξίσωση $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\chi}{\delta}$ που προκύπτει μέσα από την αναζήτηση της τετάρτης αναλόγου. Ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να γίνει αργότερα μετά τη διδασκαλία των αναλογιών.

Σύγκριση κλασμάτων – Μετατροπές - Κλασματική μονάδα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να συγκρίνουν και να διατάσσουν κλάσματα Να χρησιμοποιούν την μέθοδο αναγωγής στην κλασματική μονάδα	Να συγκρίνουν κλάσματα Να αντιστοιχούν κλάσματα με σημεία της ευθείας των αριθμών. Να μετατρέπουν ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό Να χρησιμοποιούν την μέθοδο αναγωγής στη μονάδα την τιμή ενός μέρους από το όλο. Να υπολογίζουν την τιμή του όλου από την τιμή ενός μέρους	Συγκρίνουν ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα Αντιστοιχούν κλάσματα στην αριθμητική γραμμή Μετατρέπουν ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό Υπολογίζουν την τιμή του μέρους από την τιμή του όλου και αντίστροφα, σε καθημερινές καταστάσεις, όπως και της κλασματικής μονάδας.

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Η σύγκριση κι οι μετατροπές των κλασμάτων είναι φανερό ότι στηρίζονται στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Στην ενότητα αυτή αποφεύγεται κάθε μηχανιστική προσέγγιση και ενισχύεται η αναζήτηση τρόπων σύγκρισης από τους ίδιους τους μαθητές. Η τοποθέτηση πάνω στην αριθμητική ευθεία στηρίζει σημαντικά την κατανόηση αυτής της σύγκρισης.

Δυσκολίες των μαθητών

Ο πιο συνηθισμένος τυπικός τρόπος για την σύγκριση κλασμάτων είναι η αναγωγή τους στη σύγκριση ακέραιων αριθμών με τον μετασχηματισμό τους σε ομώνυμα κλάσματα. Συχνά προτείνονται μηχανικές οδηγίες για τη σύγκριση αυτή. Ωστόσο οι οδηγίες αυτές δεν απομνημονεύονται και αρκετές φορές δεν είναι κατανοητές από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.

Επίσης η σύγκριση δύο κλασμάτων

με τον σταυρωτό πολλαπλασιασμό $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$

είναι εξίσου μηχανική και χωρίς νόημα για τους μαθητές. Ειδικότερα όμως για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες είναι ενδεχόμενο να εμφανιστούν ποικίλοι ανασχετικοί παράγοντες που ξεκινούν από την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και την δυσκολία γραφής τους (προβλήματα χωρικού προσανατολισμού) και εκτείνονται μέχρι την αδυναμία μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα (κατανόηση αλγόριθμου και σωστή τήρηση της διαδικασίας), καθώς και της σωστής διεκπεραίωσης των βημάτων (προβλήματα τήρησης ακολουθίας, οργάνωσης και μνημονικά προβλήματα). Οι διαδικασίες αυτές, όπως αναφέρθηκε ήδη, είναι καλό να αποφεύγονται.

Μια άλλη πηγή λαθών για τη σύγκριση των κλασμάτων όπως προκύπτει από ερευνητικές μελέτες είναι η προηγούμενη γνώση των φυσικών αριθμών (Steffe.L. et al., 1988).

Η προσκόλληση στην εφαρμογή στρατηγικών που εφαρμόζονται στους ακέραιους και η μεταφορά τους στα κλάσματα έχει ως αποτέλεσμα να θεωρούν τους όρους των κλασμάτων σαν ανεξάρτητους ακέραιους και να τους συγκρίνουν χωριστά. Μια τέτοια παρανόηση οδηγεί για παράδειγμα σε ισχυρισμούς της μορφής: «Το κλάσμα 5/11 είναι μεγαλύτερο από το 3/4, γιατί 5>3 και 11>4» και σε κάθε περίπτωση πρέπει να αποδομηθούν.

Οι μαθητές αυτοί συχνά ωφελούνται με την εμπλοκή οπτικών μοντέλων και τη χρήση στρατηγικών, ως εναλλακτικών εννοιολογικών ακολουθιών και σε αυτές αναφερόμαστε στα επόμενα.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Η σύγκριση κλασμάτων απαιτεί από τους μαθητές την επαρκή κατανόηση τόσο σε διαδικαστικό, όσο και σε εννοιολογικό επίπεδο.

I. *Στο διαδικαστικό επίπεδο*, είναι απαραίτητη:

- Η αναγνώριση των κλασμάτων και η ένταξή τους στα ομώνυμα ή ετερώνυμα κλάσματα,
- Η έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων και η γνώση της σχετικής διαδικασίας μετατροπής τους σε ομώνυμα στην περίπτωση των ετερώνυμων κλασμάτων (π.χ. μέσω της εύρεσης του Ε.Κ.Π)
- Η γνώση της διάταξης των ρητών αριθμών

II. *Στο εννοιολογικό επίπεδο*, είναι απαραίτητη:

1. Η γνώση και η κατανόηση των σχετικών μοντέλων για τα κλάσματα
2. Η δυνατότητα θέασης των κλασμάτων ως μερών του ίδιου όλου.

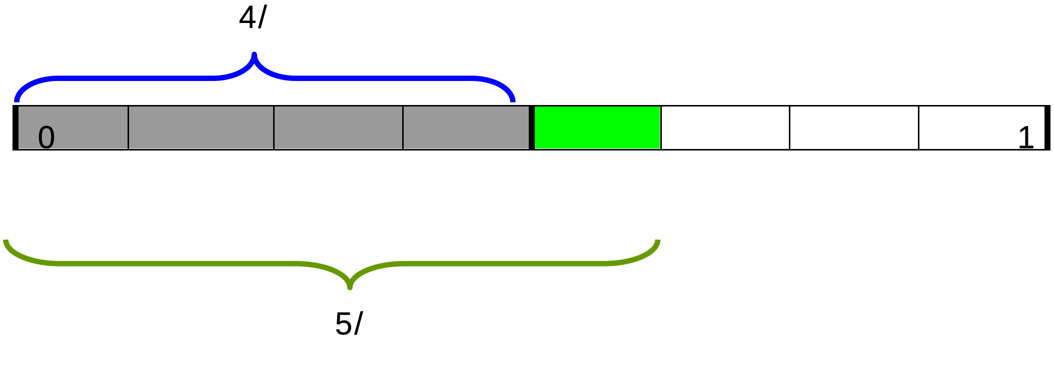
Για την διδασκαλία της σύγκρισης και της διάταξης των κλασμάτων, θεωρούμε ότι η εμπλοκή των μοντέλων, του εμβαδού, του γραμμικού μοντέλου και του μοντέλου του συνόλου, σε συνδυασμό με την χρήση δεικτών – κλασμάτων, παρέχουν αρκετές δυνατότητες για την κατανόηση των σχετικών εννοιών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες -και όχι μόνο.

Ειδικότερα, σε μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δουλεύουμε με δύο κλάσματα και με μικρούς αριθμούς. Η επέκταση σε περισσότερα κλάσματα και με μεγαλύτερους αριθμούς, εναπόκειται στη κρίση του διδάσκοντος σε σχέση με τις δυνατότητες του κάθε μαθητή χωριστά. Ανάλογα με την περίπτωση, ενδεχομένως είναι πιο αποδοτική η χρήση δεικτών την οποία παραθέτουμε στις δραστηριότητες που ακολουθούν.

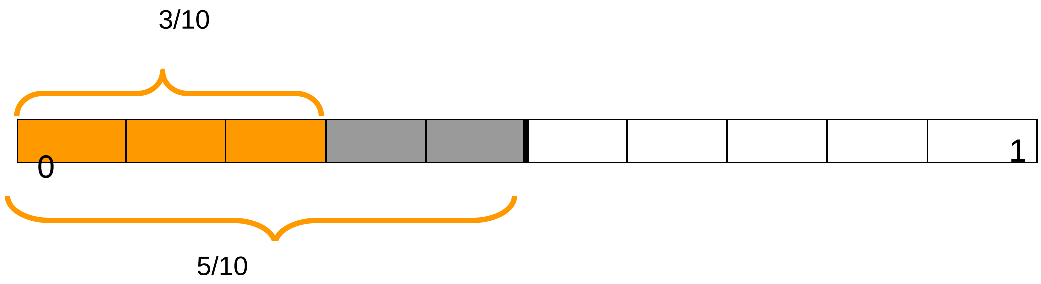
Χρήση δεικτών

Η σύγκριση δύο κλασμάτων μπορεί να απλοποιηθεί όταν είναι δυνατή η σύγκρισή τους με ένα τρίτο κλάσμα ή και το όλο και το ένα από αυτά είναι μικρότερο, ενώ το άλλο είναι μεγαλύτερο από αυτό το τρίτο κλάσμα – δείκτη ή το όλο. Φανερά εδώ το μαθηματικό υπόβαθρο είναι η διάταξη των αριθμών και η μεταβατική ιδιότητα.

Παράδειγμα χρήση του δείκτη $\frac{1}{2}$*:* Προκειμένου να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{5}{8}\ \textit{και}\ \frac{3}{10}$, χρησιμοποιώντας το κλάσμα- δείκτη μισό ($\frac{1}{2}$) διαπιστώνουμε ότι: το μισό του όλου - σε όγδοα - είναι τέσσερα όγδοα και συγκρίνουμε το $\frac{5}{8}$ με το $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ για να συμπεράνουμε ότι το $\frac{5}{8}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{4}{8}$, δηλαδή το μισό.



Το μισό του όλου σε δέκατα, είναι $\frac{5}{10}$ και φανερά η σύγκριση του $\frac{3}{10}$ με το $\frac{5}{10}$ δείχνει ότι το $\frac{3}{10}$ είναι μικρότερο από το $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, δηλαδή το μισό.



Αφού το $\frac{3}{10}$ είναι μικρότερο από το μισό και το $\frac{5}{8}$ μεγαλύτερο από το μισό αναμένεται, συμπεράνουμε ότι το $\frac{3}{10}$ είναι μικρότερο από το $\frac{5}{8}$.
Ανάλογα προς τον τρόπο χρήσης του δείκτη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλους δείκτες, όπως το 1,2, 3/4, κτλ.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Προφορικές και νοερές δραστηριότητες

- Στις διακοπές των Χριστουγέννων, δύο συμμαθητές πήγαν εκδρομή με τις οικογένειές τους. Η Μαρία πήγε εκδρομή το 1/6 των διακοπών και ο Κώστας τα 4/6 των διακοπών. Ποιος πήγε περισσότερες μέρες εκδρομή;
- Αν ένας άλλος συμμαθητής τους πήγε εκδρομή τα 2/3 των διακοπών, με ποιόν από τους δύο προηγούμενους συμμαθητές του έκανε τις ίδιες διακοπές;
- Ο Γιάννης έφαγε τη μισή πίτσα και ο Γιώργος το 1/3 της πίτσας. Ποιος έφαγε περισσότερο;
- Δύο αδέλφια πήραν δύο ίδιες πίτσες. Ο ένας έφαγε τα 2/3 της δικής του και ο άλλος τα 9/10 της δικής του. Ποιος έφαγε περισσότερο;
- Ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ίσα; Ποιο είναι μεγαλύτερο και ποιο μικρότερο;

  1/2, 4/3, 2/4, 8/6, 3/6.

1. Σύγκριση κλασμάτων

Δραστηριότητα 1η

Να βρείτε πάνω στην αριθμογραμμή τα σημεία που αναπαριστούν τα κλάσματα: 1/4 και 3/4. Ποιο απέχει ποιο πολύ από την αρχή;
Ποιο είναι πιο μεγάλο;

Δραστηριότητα $2^{η}$

Να βρεις πάνω σε δύο αριθμογραμμές με την ίδια μονάδα, τα σημεία που αναπαριστούν τα κλάσματα: 1/2 και 2/3. Ποιο είναι πιο μεγάλο;

- Να βρεις μερικά ισοδύναμα κλάσματα των κλασμάτων: 1/2 και 2/3.

(*Αναμένουμε, εφόσον οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη διαδικασία δημιουργίας ισοδυνάμων κλασμάτων να γράψουν ισοδύναμα κλάσματα, όπως τα παρακάτω: 1/2, 2,4, 3/6, 4/8, …. και 2/3, 4/6, 6/9, 8/9, ….)*

- Ανάμεσα στα κλάσματα που έχεις βρει, γράψε δύο κλάσματα ισοδύναμα με τα αρχικά που να

είναι ομώνυμα. Ακολούθως να αναπαραστήσεις τα σημεία αυτά στην ίδια αριθμογραμμή. Ποιο είναι μεγαλύτερο; Σε πόσα μέρη χώρισες το μοναδιαίο μήκος; Τι συμπέρασμα βγάζεις;

Δραστηριότητα $3^{η}$

Στην αριθμογραμμή, χώρισε τη μονάδα σε 5 ίσα μέρη και σημείωσε στη συνέχεια τα κλάσματα:

$$\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}$$

Ποιο είναι το μεγαλύτερο και ποιο το μικρότερο; Μπορείς να τα γράψεις από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και αντίστροφα;

Δραστηριότητα $4^{η}$

Βρες με το νου σου, ποιο από τα παρακάτω κλάσματα είναι πιο κοντά στο μηδέν και ποιο πιο κοντά στο ένα;

$$\frac{1}{10}, \frac{8}{9}, \frac{3}{87}, \frac{10}{11}, \frac{5}{1000}$$

- Να συγκρίνεις με το νου σου τα κλάσματα: $\frac{1}{10}$ και $\frac{10}{11}$

- Να βρεις ένα κλάσμα μικρότερο και ένα μεγαλύτερο από το 7/8.

- Να βρεις ένα κλάσμα ανάμεσα στο 3/4 και στο 4/3

(Μπορείς να χρησιμοποιήσεις την αριθμογραμμή για να τα βρεις).

Δραστηριότητα 5η

- Να βρεις τα κλάσματα που προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας με 1,2,3,4 τους όρους των κλασμάτων, 3/4 και 2/3

3	**--**	**--**	**--**
4	**--**	**--**	**--**

2	**--**	**--**	**--**
3	**--**	**--**	**--**

- Να συγκρίνεις τα κλάσματα: $\frac{3}{4}$ και $\frac{2}{3}$

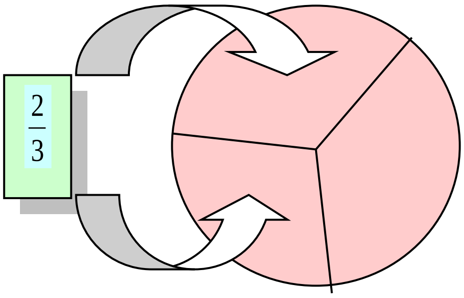
2. Σύγκριση ομώνυμων ή ετερωνύμων κλασμάτων

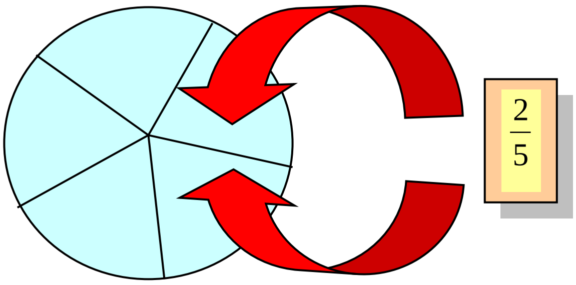
Δραστηριότητα 6η

Τοποθέτησε πάνω στην αριθμογραμμή τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$. Τι συμπέρασμα βγάζεις για τη σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων;

Δραστηριότητα 7η

Αναπαράστησε σε δύο ίδιους κύκλους τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{2}{5}$





Τι συμπέρασμα βγάζει για το τη σύγκριση κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή;

Δραστηριότητα 8η

Με τη βοήθεια του ½, σύγκρινε τα κλάσματα 3/8 και 2/3.
Κάνε το ίδιο με τα κλάσματα 2/5 και ¾.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Δώσε ένα παράδειγμα από τη σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων.
2. Δώσε ένα παράδειγμα από τη σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων.
3. Είναι σωστό ή λάθος;
   1/2 < 3/2   4/3 > 3/4   2 ≤ 6/3   5/9 > 2/3 ;
6. Είναι σωστό ή λάθος;
   3/8<5/8   0/4>0/2   1/13>1/2;

Πράξεις με κλάσματα		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να εκτελούν με ευχέρεια τις τέσσερις βασικές πράξεις Να χειρίζονται απλές παραστάσεις που συνδυάζουν κλάσματα και δεκαδικούς Να επιλύουν απλά προβλήματα κλασμάτων	Να προσθέτουν και να αφαιρούν κλάσματα και να λύσουν σχετικά προβλήματα Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν κλάσματα Να βρίσκουν τον αντίστροφο ενός αριθμού. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων, να μπορούν να τις διατυπώνουν με τη βοήθεια συμβόλων και να τις χρησιμοποιούν στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης	Προσθέτουν και αφαιρούν κλάσματα. Πολλαπλασιάζουν και διαιρούν κλάσματα. Μετατρέπουν ένα κλάσμα σε μεικτό αριθμό και το αντίστροφο. Βρίσκουν το αντίστροφο ενός κλάσματος. Υπολογίζουν την τιμή μιας παράστασης με ακεραίους και κλάσματα.

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Ο τυπικός τρόπος για την πρόσθεση κλασμάτων είναι ο μετασχηματισμός τους σε ομώνυμα κλάσματα (αν δεν είναι) και στη συνέχεια ο σχηματισμός ενός κλάσματος που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρανομαστή τον κοινό παρανομαστή. Ωστόσο η κατανόηση αυτής της διαδικασίας προϋποθέτει την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Σημαντικές ελλείψεις σε αυτή την κατανόηση μετατρέπουν τις πράξεις σε μηχανιστικές διαδικασίες χωρίς νόημα. Συχνά ο πολλαπλασιασμός πραγματοποιείται από τους μαθητές ευκολότερα, γιατί οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν αντιστοιχούν με τα συνήθη λάθη στις προσθέσεις.

Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται η προσέγγιση των πράξεων μέσα από δραστηριότητες που δίνουν στις πράξεις και τις διαδικασίες νόημα.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι σημαντικότερες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στις πράξεις ανάγονται κυρίως στο εννοιολογικό επίπεδο:

- Η προσκόλληση στο σχήμα του κλάσματος ως «μέρος-όλου» που οδηγεί τους μαθητές να μην μπορούν να δουν το κλάσμα ως ένα αριθμό (Kerslake,1986). Για παράδειγμα, 2 μέρη από τα 3 μιας πίτσας και 4 μέρη από τα 5 μιας πίτσας, κάνουν 6 μέρη από τα 8 μέρη μιας πίτσας, αλλά

δεν μπορούμε βέβαια να γράψουμε: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{6}{8}$

- Αντίστοιχα προσδιορίζουν λανθασμένα το όλο αθροίζοντας τα μέρη. Για παράδειγμα, μια εξήγηση γιατί $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$ μπορεί να είναι: « Αν πάρω ένα κομμάτι από μια πίτσα με 8 κομμάτια και άλλο ένα κομμάτι από μια άλλη πίτσα με 8 κομμάτια, τότε έχω πάρει 2 κομμάτια από 16 κομμάτια» (Mack,1995).

- Οι καθημερινές εμπειρίες των μαθητών με καταστάσεις όπου είναι δυνατή η ερμηνεία των κλασμάτων ως εξωτερικών λόγων. Τέτοιοι λόγοι, σύμφωνα με τους Behr et al. (1983) επιδέχονται πρόσθεση. Για παράδειγμα, αν ένας ποδοσφαιριστής πετύχει 3 γκολ σε 5 αγώνες στον πρώτο γύρο ενός πρωταθλήματος και 6 γκολ σε 7 αγώνες στο δεύτερο γύρο ενός πρωταθλήματος, τότε έχει πετύχει: 3+6=9 γκολ σε 5+7=12 αγώνες, αλλά δεν είναι σωστό να γράψουμε: $\frac{3}{5}+\frac{6}{7}=\frac{9}{12}$

- Η προηγούμενη γνώση των φυσικών και η μεταφορά των πράξεων και σε προβλήματα που αφορούν κλάσματα (Steffe. et al., 1988). Έτσι για παράδειγμα οι μαθητές γράφουν: $\frac{8}{7}-\frac{5}{3}=\frac{3}{4}$ βλέποντας τους όρους των κλασμάτων ως ξεχωριστούς ακέραιους.

Σε διαδικαστικό επίπεδο οι δυσκολίες των μαθητών βρίσκονται κυρίως στην εύρεση του ΕΚΠ και τις πράξεις.

Τα προβλήματα στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων εννοιολογικά οφείλονται επίσης στις προηγούμενες γνώσεις των φυσικών αριθμών. Αν ο πολλαπλασιασμός ερμηνεύεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση η μεταφορά της στα κλάσματα δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες. Αντίστοιχα αντιλήψεις όπου ο πολλαπλασιασμός δίνει ως αποτέλεσμα πάντα ένα μεγαλύτερο αριθμό και η διαίρεση ένα μικρότερο αριθμό δεν ισχύουν με στις πράξεις αυτές με τα κλάσματα. Σε διαδικαστικό επίπεδο δυσκολίες στον πολλαπλασιασμό των φυσικών είναι δυνατό να μεταφερθούν και στις πράξεις αυτές.

Η μη επαρκής κατανόηση του πολλαπλασιασμού κλασμάτων δημιουργεί προβλήματα τόσο στο τεχνικό επίπεδο διαπίστωσης και εύρεσης αντίστροφων αριθμών, όσο και στο εννοιολογικό επίπεδο που αφορά στη κατανόηση της μοναδικότητας του αντίστροφου ενός αριθμού και της διαπίστωσης ότι δεν έχουν όλοι οι αριθμοί αντίστροφο.

Η διαίρεση κλασμάτων κάτω από την ερμηνεία της αναγωγής της σε πολλαπλασιασμό κλασμάτων και με την προϋπόθεση ότι αυτό θα γίνει επαρκώς κατανοητό παρουσιάζει προβλήματα που συνδέονται τόσο με τον πολλαπλασιασμό, όσο και με την εύρεση του αντίστροφου ενός αριθμού - κλάσματος.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις:

Η πρόσθεση και η αφαίρεση κλασμάτων απαιτεί από τους μαθητές την επαρκή κατανόηση τόσο σε διαδικαστικό, όσο και σε εννοιολογικό επίπεδο. Στο διαδικαστικό επίπεδο, είναι απαραίτητη:

- Η αναγνώριση των κλασμάτων και η ένταξή τους στα ομώνυμα ή ετερώνυμα κλάσματα,
- Η έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων και η γνώση της σχετικής διαδικασίας μετατροπής τους σε ομώνυμα στην περίπτωση των ετερώνυμων κλασμάτων (π.χ. μέσω της εύρεσης του Ε.Κ.Π)
- Η γνώση του γενικού τρόπου πρόσθεσης – αφαίρεσης κλασμάτων.

Στο εννοιολογικό επίπεδο, είναι απαραίτητη:

- Η γνώση και η κατανόηση των σχετικών μοντέλων για τα κλάσματα
- Η δυνατότητα θέασης των κλασμάτων ως μερών του ίδιου όλου.
- Η δυνατότητα κατανόησης της αφαίρεσης ως πράξης αντίθετης της πρόσθεσης.

Έμφαση πρέπει επίσης να δοθεί τόσο στην εκτίμηση κλασμάτων όσο και σε προσεγγιστικές λύσεις, οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν γνωστικές συγκρούσεις σε περιπτώσεις, όπως η ακόλουθη:

Οι μαθητές όχι σπάνια γράφουν: 1/2 + 1/5 = 2/7. Σε μια τέτοια περίπτωση τους ζητάμε να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα, παρατηρώντας ότι το 2/7 είναι μικρότερο από το μισό και να διαπιστώσουν ότι το αποτέλεσμα είναι λάθος, αφού στο μισό προστίθεται κάτι (το 1/5).

Για την διδασκαλία και κατανόηση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων θεωρούμε ότι επίσης η εμπλοκή των μοντέλων, του εμβαδού, του γραμμικού μοντέλου και του μοντέλου του συνόλου, παρέχουν αρκετές δυνατότητες για την κατανόηση των σχετικών εννοιών. Εξίσου χρήσιμος είναι επίσης ο πίνακας των κλασμάτων για την πρόσθεση και την αφαίρεση (Δραστηριότητα 3)

1											
1/2	1/2										
1/3	1/3	1/3									
1/4	1/4	1/4	1/4								
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5							
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6						
1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7					
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8				
1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9			
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10		
1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	
1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Είναι αρκετά προφανές γιατί το εμπόδιο της προσκόλλησης στο σχήμα του κλάσματος ως «μέρος-όλου» που οδηγεί τους μαθητές να βλέπουν το κλάσμα σαν δύο ξεχωριστούς αριθμούς (Haenish,1985) και δεν είναι αναποτελεσματικό στην πρόσθεση και στην αφαίρεση κλασμάτων, ίσως διευκολύνει τους μαθητές στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων. Ερευνητές αναφέρουν ότι η απευθείας αντιστοίχηση με οπτικά μοντέλα στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης κλασμάτων δεν προσφέρει καμία βοήθεια (Κολέζα, 2000). Είναι αναγκαία η κατάλληλη ερμηνεία του πολλαπλασιασμού προκειμένου να είναι δυνατή η κατανόηση και η λειτουργία των τροποποιημένων οπτικών μοντέλων (π.χ. Δραστηριότητα 2)

Για να βοηθήσουμε τους μαθητές στη δημιουργία κατάλληλων αναπαραστάσεων αλλά και μνημονικών τεχνικών, θεωρούμε ότι είναι βοηθητική η εμπλοκή μοντέλων όπως του εμβαδού και η ερμηνεία του πολλαπλασιασμού συνεχούς πρόσθεσης στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού $a.\frac{\beta}{\gamma}$, όπου α φυσικός (ρητός) και το $\frac{\alpha}{\beta}$ αναπαριστά το «όλο» και ως « $\frac{\alpha}{\beta}$ από τα $\frac{\gamma}{\delta}$ » στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$

Η ερμηνεία του αντίστροφου ενός αριθμού $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να προσεγγισθεί ως ο αριθμός εκείνος που όταν πολλαπλασιαστεί με τον $\frac{\alpha}{\beta}$ δίνει ως αποτέλεσμα 1, και η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ μέσα από την ερμηνεία της ως κλάσμα - πηλίκο, δηλαδή $\frac{\alpha/\beta}{\gamma/\delta}$ και του κλάσματος $\frac{A}{B}$ ως $\frac{A/B}{1}$

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Προφορικές και νοερές δραστηριότητες

1. Πρόσθεση και αφαίρεση

Μια εβδομάδα ο Γιάννης δεν πήγε σχολείο την Δευτέρα και την Τρίτη γιατί ήταν άρρωστος. Επίσης την Πέμπτη δεν πήγε σχολείο γιατί έπρεπε να πάει στο μαγαζί του πατέρα του.

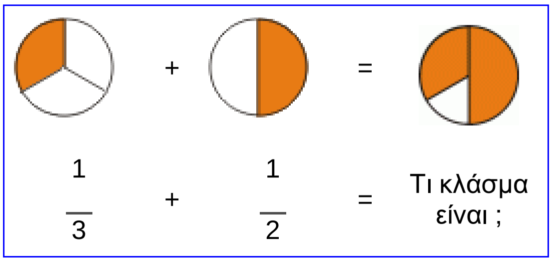
- Τι μέρος της εβδομάδας των 7 ημερών έλειψε από το σχολείο γιατί ήταν άρρωστος;
- Τι μέρος της εβδομάδας των 7 ημερών έλειψε από το σχολείο γιατί πήγε στο μαγαζί του πατέρα του;
- Τι μέρος της εβδομάδας των 7 ημερών έλειψε συνολικά από το σχολείο;

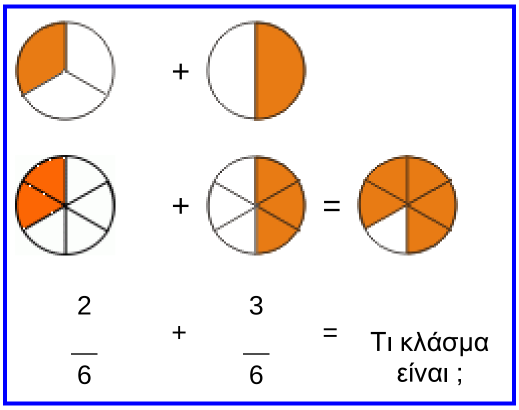
Δύο αδέλφια πήραν μια πίτσα την έκοψαν σε 8 ίσα κομμάτια και ο καθένας πήρε από μισή. Ο ένας αδελφός έδωσε ένα κομμάτι στη μητέρα του.

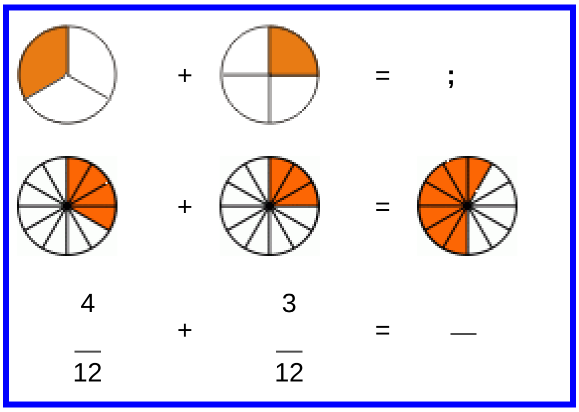
- Τι μέρος της πίτσας πήρε η μητέρα;
- Τι μέρος της πίτσας έμεινε σ' αυτόν που έδωσε το κομμάτι;

Δραστηριότητα 1η

Να συμπληρώσεις τα σχήματα:

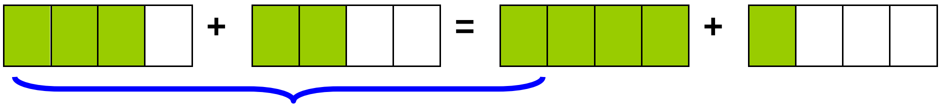






Δραστηριότητα 3^{η}

Να συμπληρώσεις την ισότητα:



3/4 + 2/4 =

Δραστηριότητα 4^{η}

Με τη βοήθεια του πίνακα κλασμάτων, να βρείτε τα κλάσματα:

2/9 + 4/9 = ;

1/2 + 1/4 = ;

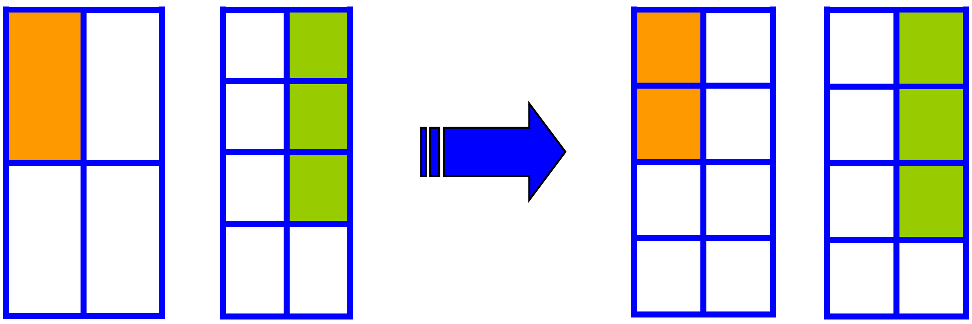
1/3 + 1/6 = ;

5/7 – 2/7 = ;

8/12 –3/6 =;

Δραστηριότητα 5^{η}

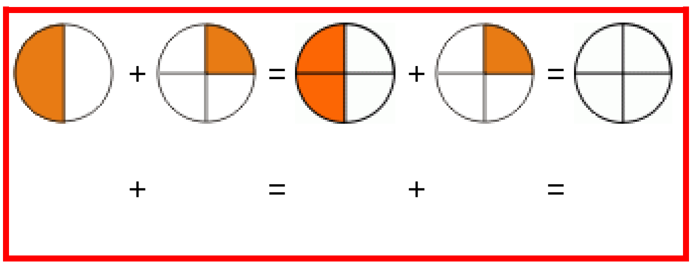
Για να προσθέσουμε τα κλάσματα 1/4 και 3/8 εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα:

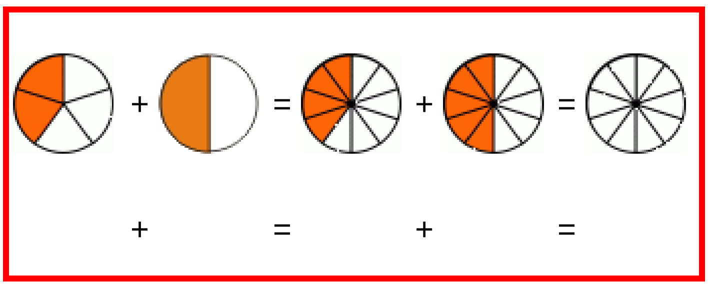


1/4 + 3/8

Δραστηριότητα 6^{η}

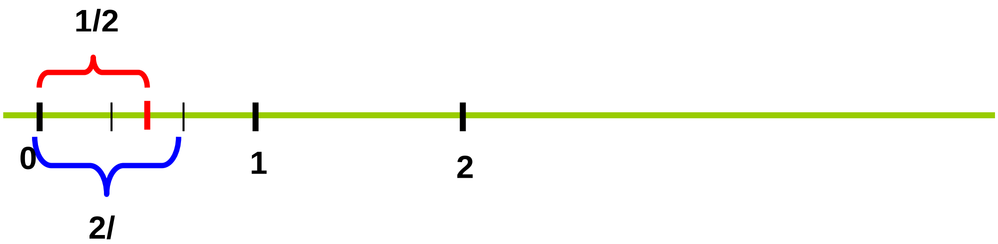
Να γράψεις, να προσθέσεις και να χρωματίσεις τα αθροίσματα στα παρακάτω κλάσματα:





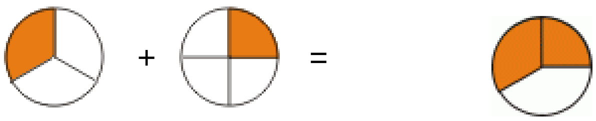
Δραστηριότητα 7η

- Να πάρεις πάνω στην αριθμογραμμή συνεχόμενα τα κλάσματα: 2/3 και 1/2.



- Πόσο είναι το άθροισμά τους; Πόσο είναι η διαφορά τους 2/3-1/2 ;

Δραστηριότητα 8η



$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$ Πόσο είναι το άθροισμα;

Δραστηριότητα 9η

Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα:

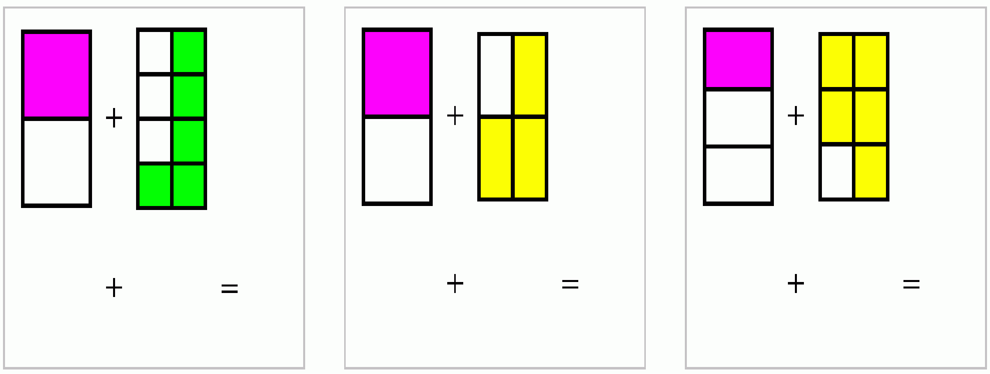
Κλάσματα για πρόσθεση		Μετασχηματίστε τα Κλάσματα σε :	Κλάσματα για πρόσθεση		Μετασχηματίστε τα Κλάσματα σε :
1/3	1/2	Έκτα (μέρη)	1/2	1/4	____;_ (μέρη)
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	____;_ (μέρη)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	____;_ (μέρη)

- Να κάνεις τις πράξεις:

1/3+1/2, 1/3+1/4, 1/2+1/4, 2/5+1/2, 1/2-1/3, 13-1/4, ½-1/4, 1/2-2/5

Δραστηριότητα 10η

Να γράψεις τα κλάσματα που αντιστοιχούν στις ζωγραφισμένες περιοχές και να υπολογίσετε τα αθροίσματα :



Δραστηριότητα 11η

Κύκλωσε τη σωστή απάντηση 3/4 – 1/2 = ……..   1/4, 1/3, 1/2, 2/3, ή 2/5

Δραστηριότητα 12η

Η Βάλια θέλει να φτιάξει ένα κέικ και μπισκότα. Το κέικ χρειάζεται 3/8 φλιτζάνια ζάχαρης και τα μπισκότα χρειάζονται 3/5 φλιτζάνια ζάχαρης. Αν η Βάλια έχει 15/16 φλιτζάνια ζάχαρης, πόσα φλιτζάνια ζάχαρης χρειάζεται και για τα δύο ;

- Με τη ζάχαρη που έχει μπορεί να φτιάξει και τα δύο γλυκά όπως λέει η συνταγή; Κύκλωσε την απάντηση:

1. Έχει αρκετή ζάχαρη
2. Χρειάζεται ακόμα 1/8 φλιτζάνι ζάχαρη
3. Χρειάζεται ακόμα 1/9 φλιτζάνι ζάχαρη
4. Χρειάζεται ακόμα 3/80 φλυτζάνι ζάχαρη
5. Χρειάζεται ακόμα 4/19 φλυτζάνι ζάχαρη

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση για πρόσθεση- αφαίρεση

1. Να προσθέσεις τα κλάσματα:

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$ $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} =$ $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} =$

2. Να προσθέσεις τα κλάσματα

$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} =$

3. Να αφαιρέσεις τα κλάσματα:

$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$	$\frac{6}{7} - \frac{1}{4} =$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{9} =$

4. Είναι σωστό ή λάθος και γιατί;
Α) 2/3+1/3=3/3 ;
Β) 3/4+2/3=5/7 ;
Γ) 1/3+2/3+1/2=4/5 ;
Δ) 2/3+1/2-1/4=10/12 ;

5. Για την κατασκευή ενός χρώματος χρειάζονται 4/5 δοχεία νερού. Αν από απροσεξία μπει στο δοχείο 1/3 του δοχείου νερό, πόσο ακόμα νερό πρέπει να προστεθεί για την κατασκευή του συγκεκριμένου μίγματος;
Α) 1/3 δοχεία ;
Β) 2/3 δοχεία ;
Γ) 1/15 δοχεία ;
Δ) 7/15 δοχεία ;
Ε) 7/16 δοχεία ;

Σημείωση:
Για την απόκτηση ευχέρειας στο χειρισμό συμβόλων και τη σωστή επεξεργασία στα κλάσματα δίνονται στους μαθητές ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο προσαρμοσμένες, ανάλογα με την πρόοδο και τις δυνατότητες του κάθε μαθητή μέσα στα πλαίσια της διαφοροποιημένης και εξατομικευμένης διδασκαλίας.

2. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

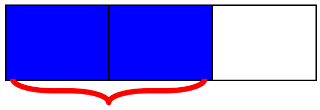
Ενδεικτικές δραστηριότητες
Προφορικές και νοερές δραστηριότητες

- Η Βάλια έχει 1/2 του ευρώ και ο πατέρας της, της δίνει ακόμα 1/2 του ευρώ. Πόσα € έχει;
- Ο Ζαφείρης με τον Μιχάλη πήραν μία τούρτα. Ο Ζαφείρης τη μοίρασε στη μέση και ξεκίνησε να φάει τη μισή τούρτα που του αναλογούσε στο μερίδιό του. Η μητέρα του όμως του είπε ότι δεν πρέπει να φάει ολόκληρο το κομμάτι του μαζί, αλλά να φάει το μισό τη μία μέρα και το άλλο μισό την άλλη μέρα από το κομμάτι του. Πόσο θα φάει κάθε φορά;
- Πόσο είναι 3 φορές το 1/5, 2 φορές το 5/2, 2 φορές το 3/4;
- Πόσο είναι 2 φορές του ½, 3 φορές το 1/3;
- Πόσο είναι το ½ του 2/1, τα 2/3 του 3/2, τα ¾ του 4/3; ,
- Πόσο είναι το τριπλάσιο των 2/3; Πέστε το με σύμβολα
- Πόσο είναι το μισό του μισού; Πέστε το με σύμβολα.

Δραστηριότητα 1η

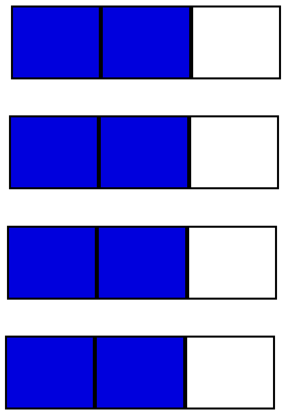
Βρες τα $\frac{2}{3}$ του διπλανού σχήματος:

Χωρίζουμε σε τρία ίσα κομμάτια το σχήμα και παίρνουμε τα δύο (Χρώμα μπλε) $\frac{2}{3}$

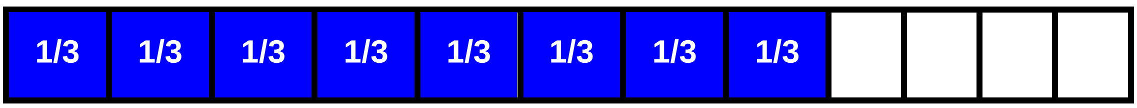


Βρες το τετραπλάσιο του $\frac{2}{3}$:

Θεωρώντας ως «όλο» το $\frac{2}{3}$, επαναλαμβάνουμε τέσσερις φορές το παραπάνω σχήμα και παίρνουμε:



ή με τη βοήθεια των ράβδων αρίθμησης:

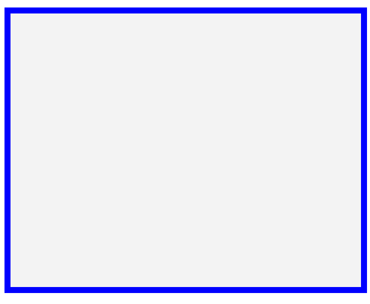


Έχουμε συνολικά 12 τετραγωνάκια, και τα τετραγωνάκια που σχηματίστηκαν από την επανάληψη του σχήματος που αναπαριστά τα $\frac{2}{3}$ είναι συνολικά 8 τετραγωνάκια. Επειδή το κάθε τετραγωνάκι είναι 1/3, παίρνουμε ότι το τετραπλάσιο του $\frac{2}{3}$ είναι $\frac{8}{3}$.

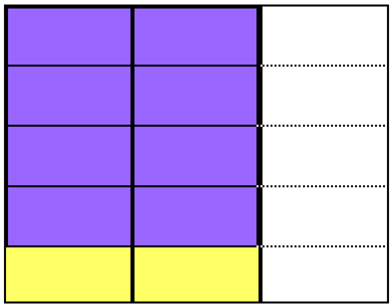
- Τι συμπεραίνεις για τον πολλαπλασιασμό $4 \cdot \frac{2}{3}$;

Δραστηριότητα 2η

Να βρείτε τα $\frac{2}{3}$ του σχήματος:



Βρες τα $\frac{4}{5}$ του χρωματισμένου τμήματος πάνω στο σχήμα που έχει προκύψει. Τι μέρος του αρχικού σχήματος είναι το μπλε τμήμα που βρήκες;



Δραστηριότητα 3η

Βρες τα γινόμενα:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1},\ \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2},\ \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$$

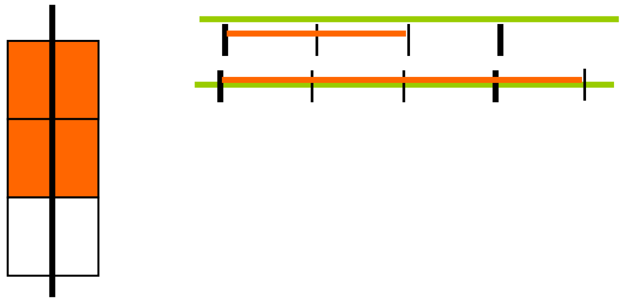
Πρότεινε μια ονομασία για τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα

Πόσο κάνει 0.α ;

Ο μηδέν έχει αντίστροφο ; Έχουν όλοι οι αριθμοί αντίστροφο;

Δραστηριότητα 4η

Δοκίμασε να βρεις το πηλίκο 2/3: 2 και στη συνέχεια το πηλίκο 2/3: 1/2



Συνδύασε τα δύο για να βρεις το πηλίκο 3/5: 2/3

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:

   $$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4},\ \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$$

2. Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα τα μετατρέπουμε σαν ομώνυμα: Σωστό ή Λάθος ;
3. Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίστροφοι; Έχουν όλοι οι αριθμοί αντίστροφο; Ο κάθε αριθμός έχει το δικό του αντίστροφο;
4. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των αριθμών:

   $$\frac{2}{3},\ 4,\ \frac{5}{2},\ \frac{1-\frac{2}{2}}{7},\ 1$$

5. Πως διαιρούμε κλάσματα;

6. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}\ ,\ \frac{1}{2}:\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5}:\frac{5}{7}\ ,\ 2:\frac{3}{8}\ ,\ \frac{4}{7}:5$$

7. Να βρεθούν οι αριθμοί:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\ ,\ \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\ ,\ 2.\frac{4-2}{5}\cdot\frac{5}{2}$$

8. Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Α) $3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$; Β) $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{30}{100}$;

10. Ένας παραγωγός έβγαλε από ένα χωράφι του 80 κιλά μήλα. Πούλησε αρχικά τα μισά και στη συνέχεια τα μισά απ' όσα του είχαν μείνει. Τα υπόλοιπα που του έμειναν θέλει να τα συσκευάσει σε κουτιά του μισού κιλού.

Α) Πόσα κιλά μήλα θα συσκευάσει;

Β) Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Μετατροπές – Μεικτοί και Δεκαδικοί		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να μετατρέπουν κλάσματα σε μεικτούς αριθμούς Να μετατρέπουν κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς	Να μετατρέπουν ένα κλάσμα σε μεικτό αριθμό Να μετατρέπουν ένα κλάσμα σε δεκαδικό μορφή Να μετατρέπουν μια δεκαδική μορφή σε κλάσμα	Μετατρέπουν ένα κλάσμα σε μεικτό αριθμό και αντίστροφα Μετατρέπουν ένα κλάσμα σε δεκαδική μορφή και ένα τις δεκαδικές μορφές με πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών σε κλάσματα.

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Η ενοποίηση του συνόλου των αριθμών είναι ένα σημαντικό στοιχείο στην κατανόηση τους, αλλά και στην επέκτασή τους στο σύνολο των ρητών. Η μετατροπές μεταξύ κλασμάτων και δεκαδικών όπως και η κοινή τοποθέτησή τους στην αριθμητική ευθεία βοηθάει τους μαθητές να συνδέουν τους αριθμούς που διδάσκονται ξεχωριστά.

Η μετατροπή κλασμάτων σε μεικτούς αριθμούς και αντίστροφα γενικεύει την έννοια του κλάσματος ενώ παράλληλα στηρίζει την αντίληψη του κλάσματος ως λόγο και διαίρεση. Η προηγούμενη ενασχόληση με όλες τις όψεις του κλάσματος μπορεί να βοηθήσει αυτή την προσέγγιση.

Δυσκολίες των μαθητών

Η έμφαση στην παρουσίαση των κλασμάτων ως «μέρος – όλου» δημιουργεί στους μαθητές την λανθασμένη αντίληψη ότι το κλάσμα είναι μικρότερο από τη μονάδα, αποδυναμώνει την αντίληψη τους ως πηλίκο διαίρεσης και δημιουργεί δυσκολίες στη μετατροπή κλασμάτων (>1) σε μεικτούς αριθμούς. Η κάλυψη των όψεων αυτών από τις προηγούμενες ενότητες και η χρήση παραστατικών μέσων διευκολύνει τους μαθητές σε αυτές τις μετατροπές.

Η μεγαλύτερη δυσκολία που εντοπίζεται στους μαθητές είναι ο διαχωρισμός των κλασμάτων από τους δεκαδικούς, δεδομένου ότι αποτελούν δύο διαφορετικά σύνολα και σε εννοιολογικό επίπεδο και σε επίπεδο συμβολισμού. Η κατάλληλη εισαγωγή των δεκαδικών αριθμών και η σύνδεσή τους με τα δεκαδικά κλάσματα στηρίζει το ξεπέρασμα αυτού του εμποδίου. Εξάλλου η κατοχή της δυνατότητας μετατροπής των δεκαδικών σε κλάσματα τις περισσότερες φορές βοηθάει στους υπολογισμούς με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν υπάρχουν προβλήματα στις πράξεις στα κλάσματα.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Σχηματικές παραστάσεις εμβαδών, συνόλων και ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να στηρίξει τη μετατροπή κλασμάτων σε μεικτούς αριθμούς. Οι δραστηριότητες ενθαρρύνουν τη σύγκριση αριθμητή και παρονομαστή και την εξαγωγή των μονάδων.

Οι συγκρίσεις κλασματικών και δεκαδικών αριθμών μέσα σε πραγματικές καταστάσεις και οι τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή βοηθάει τους μαθητές να συνδέσουν τις δύο αυτές μορφές και να τους αντιλαμβάνονται ως εναλλακτικές μορφές ενός ρητού αριθμού. Στις δραστηριότητες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η αριθμομηχανή.

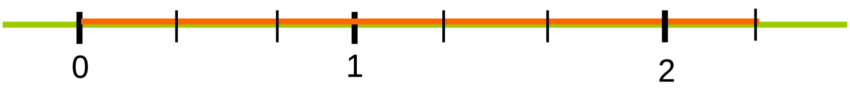
Ενδεικτικές δραστηριότητες

Προφορικές και νοερές δραστηριότητες

- Ποιος από τους αριθμούς 4/10 και 0,5 είναι μεγαλύτερος ;
- Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας χρεώνει 0.03 λεπτά το SMS και μία άλλη 29/1000. Ποια από τις δύο είναι πιο ακριβή;
- Στις εκπτώσεις ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 30% και ένα άλλο δίνει δύο ίδια προϊόντα στη τιμή του ενός. Αν θέλει κάποιος να αγοράσει 2 ίδια προϊόντα που έχουν και τα δύο καταστήματα, από που συμφέρει να ψωνίσει;

Δραστηριότητα 1η

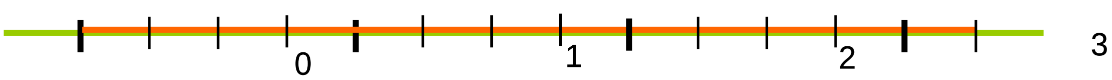
Πάνω στην αριθμητική γραμμή τοποθέτηση το κλάσμα $\frac{7}{3}$ και στη συνέχεια γράψε τις μονάδες που περικλείει και το κλάσμα που απομένει όταν βγάλεις τις μονάδες.



Δοκίμασε τη διαίρεση 7:3 και σύγκρινε με το αποτέλεσμα που βρήκες.

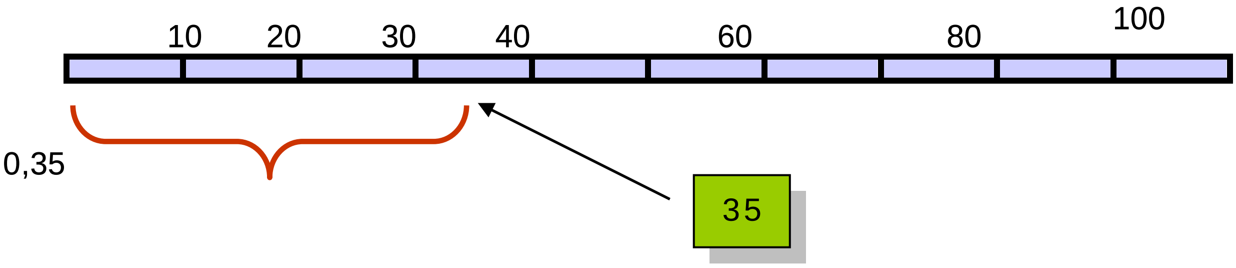
Δραστηριότητα 3η

Να μετατρέψεις το μεικτό κλάσμα 3 ¼ σε κλάσμα



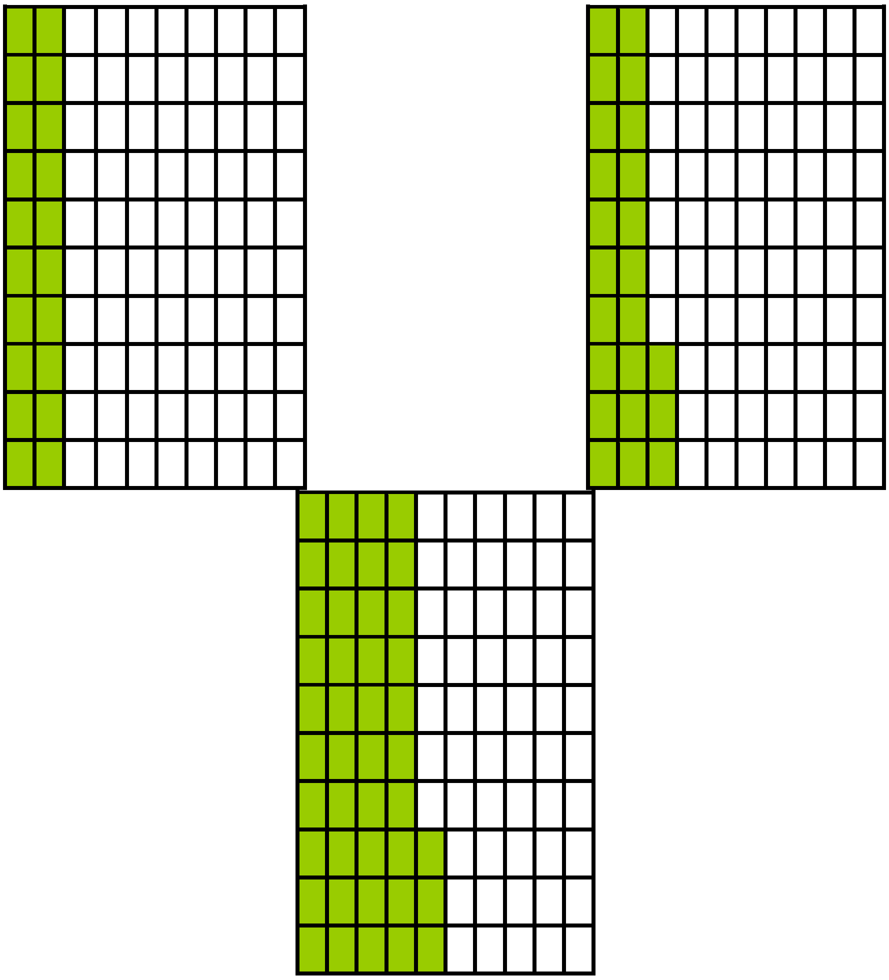
Δραστηριότητα 4η

Διάβασε το δεκαδικό 0,35 και στη συνέχεια να το μετατρέψεις σε κλάσμα.



Δραστηριότητα 5η

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο του εμβαδού, βρες τους δεκαδικούς και τα κλάσματα των χρωματισμένων μερών:



Μεταφέροντας τα τετραγωνάκια και τοποθετώντας τα μαζί σε ένα ίδιο τετράγωνο 10x10, διαπιστώνουμε ότι έχουμε 43 τετραγωνάκια και επειδή συνολικά είναι 100 τετραγωνάκια, παίρνουμε ότι ο ζητούμενος δεκαδικός είναι 0,43.

Δραστηριότητα 6η

Μετάτρεψε τα κλάσματα σε δεκαδικούς:

67/100, 23/50, $\frac{12}{25}$

12/10, 3/5, 5/2

Δραστηριότητα 7η

Τοποθέτησε πάνω στην αριθμογραμμή τους αριθμούς:
0,25, ¾, 7/3, 0,5, 4/8, ¼, ½, 21/3

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος:

α) 1,3 ή 3/2 β) 4,65 ή 24/5

2. Εκτίμησε (χωρίς να κάνεις πράξεις) ποιος αριθμός είναι πιο κοντά στον αριθμό: $\frac{38}{120}$

0,003 0,03 0,3 3 30 300 3000

3. Υπολόγισε τα γινόμενα

$2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{5}$ $6\frac{2}{7} : 3\frac{2}{7}$

- **Γεωμετρικές έννοιες, Συμμετρία και Μετρήσεις επιφανειών**

Γενικές επισημάνσεις

Η Γεωμετρία αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο των Μαθηματικών γιατί οι γεωμετρικές γνώσεις είναι απαραίτητες για την αντίληψη του χώρου και των ιδιοτήτων του, όπως και τη λειτουργία μέσα σε αυτόν. Περιγράφουν τις μορφές των φυσικών και τεχνητών αντικειμένων, χρησιμοποιούνται σε καθημερινά προβλήματα κι εκτός που αποτελούν μια οικεία και ευχάριστη δραστηριότητα, πολλές από τις έννοιες και διαδικασίες της Γεωμετρίας χρησιμοποιούνται στην προσέγγιση άλλων μαθηματικών εννοιών.

Η ενότητα που αναπτύσσεται στο Δημοτικό και στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου αποτελεί αυτό που θα ονομάζαμε μη τυπική Γεωμετρία, που συνοψίζει τα γεωμετρικά σχήματα, τις ιδιότητές και τις σχέσεις τους.

Αν και οι έννοιες αυτές μοιάζουν αρκετά απλές, λόγω της εποπτικής προσέγγισής τους, συχνά συνοδεύονται με παρανοήσεις που δεν επιτρέπουν τα παιδιά να αναπτύξουν αργότερα και να χρησιμοποιήσουν τη γεωμετρική αυτή γνώση.

Είναι απαραίτητο να αποσαφηνιστεί ότι οι γεωμετρικές έννοιες είναι τόσο πραγματικές όσο και θεωρητικές (πχ. ένα τετράγωνο είναι ένα πραγματικό αντικείμενο, αλλά κι ένα γεωμετρικό αντικείμενο με ιδιότητες). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές μπορούν να τις αναγνωρίσουν οπτικά αλλά δεν καταφέρνουν να «δουν» τις ιδιότητες τους (πχ. ένα τετράγωνο είναι ένα σχήμα με ίσες πλευρές).

Για τα γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιούμε παραστάσεις με διαφορετική σημασία (σχέδια, σχήματα, λόγια, σύμβολα) και αναγνωρίζουμε σε αυτά διαφορετικά στοιχεία. Συχνά απαιτείται από τα παιδιά να περάσουν γρήγορα από τη μία μορφή στην άλλη (Hershkowitz et als., 1996)

Συχνά επίσης ένα σχήμα παριστάνει διαφορετικές όψεις των γεωμετρικών αντικειμένων, πχ. είναι ένα αντιπροσωπευτικό σχήμα, ένα ενδεικτικό σχήμα, ένα «περιγραφικό» σχήμα, κλπ. Από την μη τυπική Γεωμετρία του Δημοτικού τα παιδιά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν ιδιότητες στα σχέδια ή και να μετρούν και να κάνουν υπολογισμούς, ενώ ένα μέρος της Γεωμετρίας αυτού του επιπέδου στοχεύει να ασκήσει τους μαθητές να χρησιμοποιούν τα σχήματα ως βάση για να προχωρήσουν τους συλλογισμούς τους ή να λύσουν γεωμετρικά προβλήματα (Mammana et als, 1998).

Ο σχεδιασμός, οι κατασκευές και οι χαράξεις των γεωμετρικών καταστάσεων βοηθάει σημαντικά τους μαθητές στον εντοπισμό σχέσεων και ιδιοτήτων (Τζεκάκη, 2001).

Βασικές γεωμετρικές έννοιες και βασικές γεωμετρικές σχέσεις. Σχήματα-αναγνώριση σχεδιασμός		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να αναγνωρίζουν τα σχήματα σε ένα σύνθετο σχήμα Να σχεδιάζουν τα σχήματα με τη βοήθεια οργάνων	Να σχεδιάζουν και να συμβολίζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες και ημιευθείες, επίπεδο και ημιεπίπεδο, είδη γραμμών. Να διακρίνουν τις σχέσεις σημείου, ευθείας, ευθύγραμμου τμήματος, παραλληλίας, καθετότητας, μέσο ευθυγράμμου τμήματος. Σχεδιάζουν και συμβολίζουν επίπεδα.	Χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα για να σχεδιάζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες και ημιευθείες, επίπεδο και ημιεπίπεδο, είδη γραμμών. Ασκούνται στο συμβολισμό των γεωμετρικών στοιχείων. Σχεδιάζουν το μέσο ευθυγράμμου τμήματος.
	Ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων και σχημάτων. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων,	Χρησιμοποιούν τον κανόνα και το διαβήτη για τη σύγκριση, σχεδίαση και τη μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων

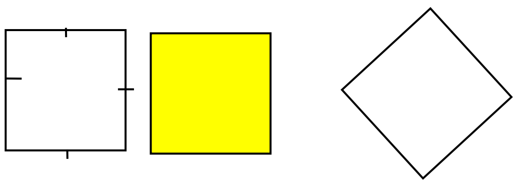
Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Πολλές από τις πρακτικές γνώσεις που ανέπτυξαν οι μαθητές σε μικρότερες τάξεις μπορούν να αποσαφηνισθούν μέσα από την ενότητα αυτή και οι κατασκευές βοηθάνε σημαντικά προς αυτή την κατεύθυνση. Οι χαράξεις με όργανα, οι μετρήσεις, οι περιγραφές ή οι εξηγήσεις βοηθούν σημαντικά τους μαθητές στη διατύπωση ιδιοτήτων και σχέσεων που είναι μέρος των γεωμετρικών γνώσεων που επιδιώκουμε.

Ανάμεσα στα σημαντικότερα στοιχεία της Γεωμετρίας είναι τα στοιχεία βάσης (σημείο, ευθεία, επίπεδο) πάνω στα οποία δομείται κάθε ανάλυση των γεωμετρικών καταστάσεων και τα οποία, αν και προφανή, δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά γιατί είναι θεωρητικά, ενώ τα παιδιά συνηθίζουν να αντιλαμβάνονται τα στοιχεία που χαράζουν ή «βλέπουν», όπως είναι τα ευθύγραμμα τμήματα. Συχνά ο σωστός σχεδιασμός (υπόδειξη σημείων, προεκτάσεις των ευθειών, εντοπισμός επιπέδων) βοηθάει τα παιδιά να αντιληφθούν τις έννοιες αυτές.

Δυσκολίες των μαθητών

Μία από τις πιο σημαντικές δυσκολίες των μαθητών είναι η ολιστική αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων χωρίς διάκριση των ιδιοτήτων ή των σχέσεων. Έτσι για παράδειγμα ένα παιδί μπορεί να αναγνωρίζει ότι το παρακάτω σχήμα είναι τετράγωνο χωρίς να εντοπίζει ότι έχει τέσσερις ίσες πλευρές, καθετότητες και παραλληλίες. Επιπλέον δεν βλέπει τις κορυφές ως σημεία, συχνά μπερδεύει το τετράγωνο με το εσωτερικό του και είναι πιθανό να μην το αναγνωρίσει σε μία μη στερεοτυπική θέση.



Παράλληλα, οι συνήθεις σχεδιασμοί και παραστάσεις των γεωμετρικών σχημάτων σε στεροτυπικές θέσεις (οριζόντια και κατακόρυφα) εμποδίζει τους μαθητές να διακρίνουν καταστάσεις σε άλλες κατευθύνσεις. Για παράδειγμα, μια καθετότητα αναγνωρίζεται στην πρώτη μορφή, αλλά με δυσκολία στη δεύτερη.

Τέλος, η αντίληψη και ο σχεδιασμός του επιπέδου αποτελεί ένα νέο στοιχείο στο οποίο οι μαθητές είναι πιθανό να εμφανίσουν δυσκολίες. Στην αντίληψή τους το φύλλο σχεδίασης δεν αποτελεί ένα επίπεδο, αλλά ένα χώρο όπου είναι σχεδιασμένα αντικείμενα. Για το λόγο αυτό το εσωτερικό ή το εξωτερικό των σχημάτων είναι για αυτούς κενός χώρος.

Διδακτικές υποδείξεις

Στην ενότητα αυτή, που επικεντρώνεται στην ανάδειξη των βασικών γεωμετρικών στοιχείων (σημεία, ευθείες και επίπεδα) και των μεταξύ τους σχέσεων, επιδιώκεται να μειωθεί η ολιστική αντίληψη.

Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών και την ανάδειξη ιδιοτήτων και σχέσεων ενθαρρύνεται η κατασκευή και ανάλυση των σχημάτων, όπως κι η παρουσίασή τους σε μη στεροτυπικές θέσεις.

Ο σχεδιασμός ή οι κατασκευές τους με πολλά διαφορετικά μέσα βοηθάει σε μια πιο αναλυτική αντίληψη. Η χρήση διαφορετικών μέσων κατασκευής με υλικά, με τα γεωμετρικά όργανα, σε τετραγωνισμένο φύλο ή στον ισομετρικό καμβά βοηθούν τα παιδιά να προσεγγίσουν διαφορετικές ιδιότητες, ενθαρρύνει τις νοερές αναπαραστάσεις και την αντίληψη των σχέσεων.

Η αντίληψη των επιπέδων στηρίζεται στα τρισδιάστατα αντικείμενα. Παράλληλα είναι αναγκαία η ενθάρρυνση λεκτικών περιγραφών και συμβολισμών, όπως και «σεναρίων κατασκευής» που αναπτύσσει στα παιδιά το γεωμετρικό λόγο και τη χρήση συμβόλων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

1. Διάκριση σημείων, μεμονωμένα, σε ευθύγραμμα τμήματα και σε σχήματα. Διάκριση ευθείας, ευθύγραμμου τμήματος και ημιευθείας

Δραστηριότητα 1η

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τον αστερισμό της Μεγάλης και της Μικρής άρκτου με το τελευταίο της αστέρι, τον Πολικό.

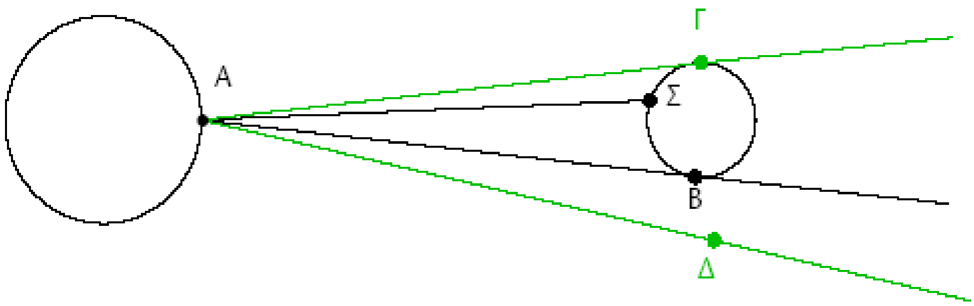
- Σημείωσε με γράμματα τα άστρα της Μεγάλης και της Μικρής Άρκτου. Τα κάτω άστρα της Μεγάλη Άρκτου και ο Πολικός Αστέρα βρίσκονται στην ίδια ευθεία;
- Αν ενώσεις τα σημεία αναγνωρίζεις τα σχήματα;
- Δοκίμασε να τα δεις ένα έναστρο βράδυ στον ουρανό.

Δραστηριότητα 2η

Στο σχήμα που ακολουθεί, από ένα σημείο Α της Γης εκπέμπεται μια ακτίνα laser, που ανακλάται σε ένα σημείο Σ της σελήνης και επιστρέφει στη γη.

Οι ακτίνες ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ δεν ανακλώνται και χάνονται στο διάστημα.

- Σε τι διαφέρει το ΑΣ από τις ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ;
- Πώς ονομάζουμε τι ΑΣ και τις ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ για να τις ξεχωρίζουμε;



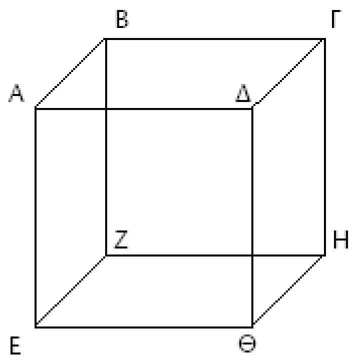
Δραστηριότητα 3η

Χρησιμοποίησε ένα φύλλο χαρτί και ένα μολύβι πάνω στο φύλλο. Βρες τρόπους να σχεδιάσεις αυτή την κατάσταση.

Δραστηριότητα 4η

Το σχήμα παριστάνει ένα κύβο.

- Ονόμασε τα επίπεδα που μπορείς να διακρίνεις.
- Χρωμάτισε το επίπεδο ΑΒΓΔ.
- Πάρε δύο σημεία Κ και Λ πάνω στο επίπεδο ΑΒΓΔ κι ένα σημείο Μ έξω από αυτό.
- Σχεδίασε την ευθεία ΑΓ, μπορεί να την προεκτείνεις έξω από τον κύβο;
- Σχεδίασε μια ημιευθεία από το Ε που περνάει από το Θ. Μπορείς να την προεκτείνεις έξω από τον κύβο;



2. *Αντίληψη του επιπέδου, παράλληλες και κάθετες*

Δραστηριότητα 5η

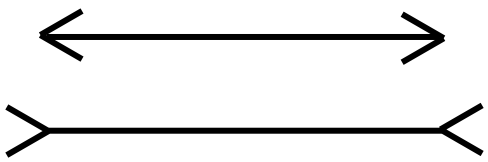
Στον ίδιο κύβο βρες ευθείες του επιπέδου ΑΒΓΔ που είναι παράλληλες και κάθετες.

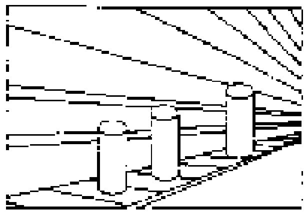
- Χρωμάτισε τις ευθείες ΓΗ και ΑΔ. Βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο; Σε ποιο; Τέμνονται; Είναι παράλληλες;
- Χρωμάτισε άλλες δύο ευθείες που έχουν την ίδια σχέση.

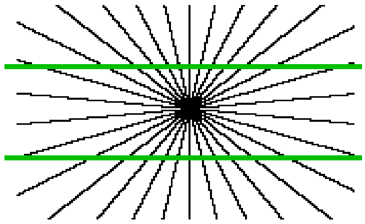
Δραστηριότητα $5^{η}$

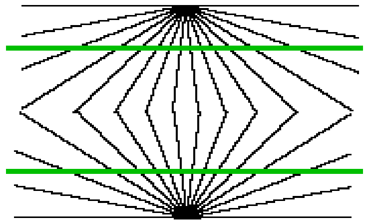
Οπτικά τρυκ:

- Ποιο ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερο;
- Ποιος κύλινδρος ψηλότερος;
- Ποιες ευθείες είναι παράλληλες;





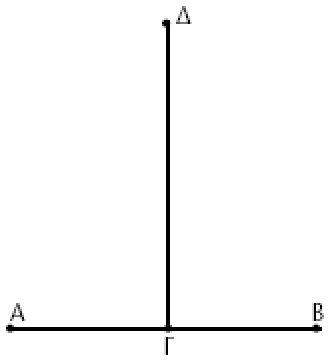




3. *Σύγκριση και μεταφορά ευθυγράμμων τμημάτων*

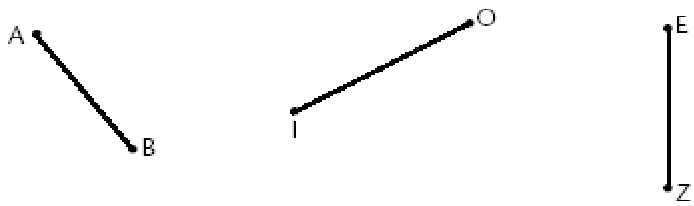
Δραστηριότητα $6^{η}$

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι μεταξύ τους ίσα;
Ποιο σημείο του τμήματος ΑΒ είναι το Γ;



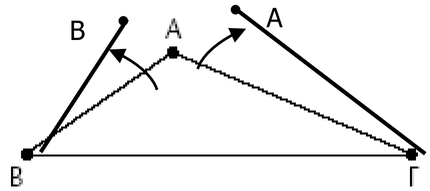
Δραστηριότητα $7^{η}$

Ένας σχεδιαστής προσπαθεί να βάλει το ένα δίπλα στο άλλο σε μία ευθεία τα ευθύγραμμα τμήματα, αλλά δεν έχει υποδεκάμετρο. Έχει μόνο ένα χάρακα και ένα διαβήτη. Πώς θα το κάνει;



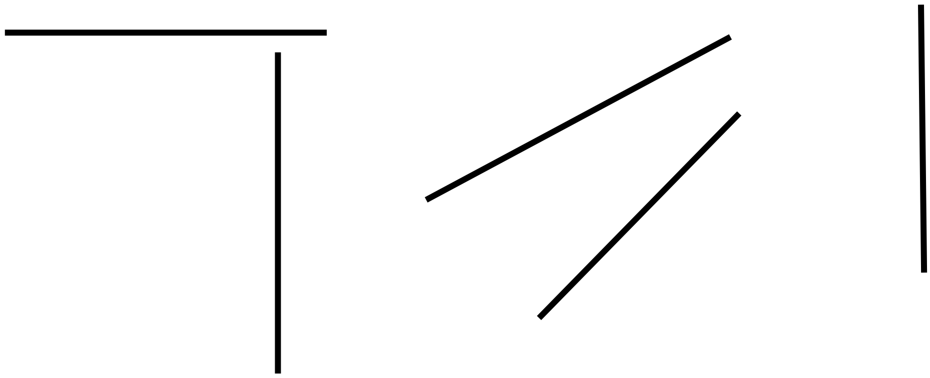
Δραστηριότητα 8η

Με το διαβήτη, προσπάθησε να «ξεδιπλώσεις» το τρίγωνο.



Δραστηριότητα 9η

Προσπάθησε να βρεις, χρησιμοποιώντας το διαβήτη, ποια τμήματα είναι μεταξύ τους ίσα και χρωμάτισε τα με τα ίδια χρώματα.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Στην παράγραφο αυτή συναντήσαμε τους μαθηματικούς όρους: **σημείο, ευθεία, επίπεδο, ευθύγραμμο τμήμα, ημιευθεία**. Βρες αντικείμενα που να μας δίνουν πρακτικά την εικόνα αυτών των εννοιών και κάνε ένα σχήμα για κάθε περίπτωση.
2. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μια ευθεία ε και πάνω σ' αυτήν 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ.

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να ονομάσεις την ευθεία ε;
- Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα και ποια ορίζονται

3. Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς μία τρίτη, τι θα είναι μεταξύ τους;
4. Με τη βοήθεια του διαβήτη σου κατασκεύασε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την περίμετρο ενός τετραγώνου του οποίου η πλευρά είναι ένα τμήμα ίσο με το α.
5. Η ευθεία έχει μέσο; Η ημιευθεία;

Παραλληλία - Καθετότητα – Απόσταση - Ύψη		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να μπορούν να σχεδιάζουν τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες με τη βοήθεια οργάνων. Να μπορούν να σχεδιάζουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών. Να εφαρμόζουν τεχνικές χάραξης των υψών τριγώνου	Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες, να γνωρίζουν και να μπορούν να σχεδιάσουν μια ευθεία παράλληλη από ένα σημείο Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες είναι κάθετες, να γνωρίζουν και να μπορούν να σχεδιάσουν μια ευθεία κάθετη από ένα σημείο Να βρίσκουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος Να κατανοήσουν τι σημαίνει απόσταση δύο παραλλήλων Να χαράζουν τα ύψη παραλληλογράμμου και τραπεζίου	Σχεδιάζουν παράλληλες και κάθετες ευθείες. Σχεδιάζουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση παραλλήλων Χαράζουν ύψη σε όλα τα σχήματα Σχεδιάζουν τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος.

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Οι έννοιες της ενότητας αυτής χαρακτηρίζεται από όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, με ιδιαίτερο χαρακτηριστικό την χάραξη ευθειών και την κατασκευαστική διαδικασία.

Η απόσταση είναι μια οικεία έννοια για την οποία επιδιώκεται η αποσαφήνιση του γεωμετρικούς της περιεχομένου και η σύνδεσή της με την καθετότητα.

Δυσκολίες των μαθητών

Η βασική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η αντίληψη της παραλληλία και της καθετότητας σε μη στεροτυπικές θέσεις. Συνδέουν το κάθετο με το κατακόρυφο και οι δραστηριότητες που προτείνονται επιδιώκουν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν την αντίληψη αυτή.

Διδακτικές υποδείξεις

Επιδιώκεται να συνδεθούν οι οικείες έννοιες των παραλλήλων, καθέτων και της απόστασης, μέσα από πραγματικές καταστάσεις και χαράξεις με το γεωμετρικό τους νόημα.

Προτείνονται σχήματα όπου οι περισσότερες ευθείες βρίσκονται σε πλάγια θέση και ιδιαίτερα η δραστηριότητα με την περιστροφή επιδιώκει να βοηθήσει τους μαθητές να παρακολουθήσουν το μετασχηματισμό στης καθετότητας στις θέσεις αυτές.

Το «σενάριο κατασκευής» είναι μια αναλυτική παρουσίαση των βημάτων που απαιτούνται για μία χάραξη με την κατάλληλη χρήση οργάνων, το οποίο βοηθάει τους μαθητές να πλουτίσουν την κατασκευαστική τους εμπειρία.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

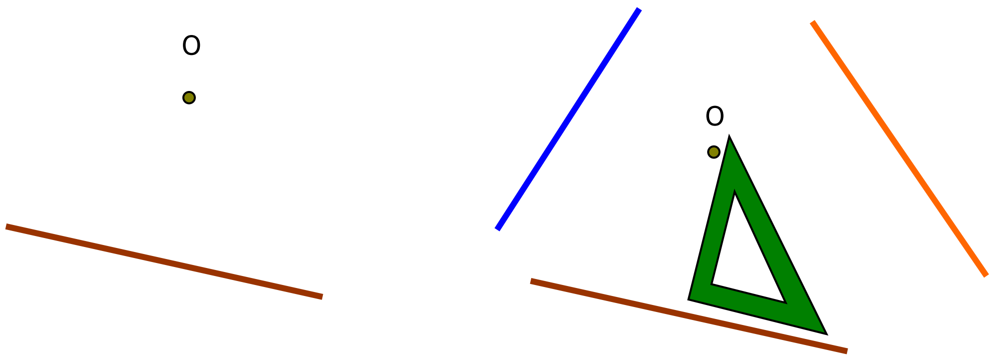
1. *Εύρεση απόστασης, χάραξη απόστασης*

Δραστηριότητα 1^{η}

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα σπίτι και τον υποσταθμό της ΔΕΗ (Ο), με τον οποίο είναι απαραίτητο να συνδεθεί.

- Σχεδίασε τη συντομότερη απόσταση.

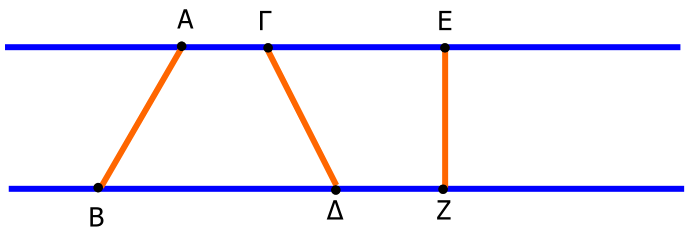
- Αν το ηλεκτρικό χρειάζεται να συνδεθεί με τα σπίτια που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, σχεδίασε τις συντομότερες γραμμές.



Δραστηριότητα 2η

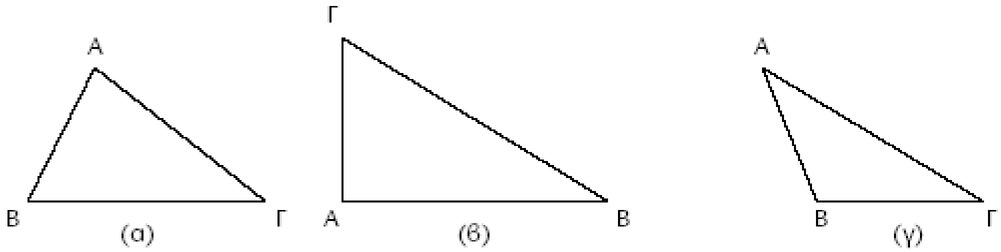
Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα ποτάμι με παράλληλες όχθες. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ δείχνει τις γέφυρες που θα μπορούσαν να χτιστούν.

- Ποια από όλες θεωρείς ότι είναι η καλύτερη επιλογή. Εξήγησε την επιλογή σου.

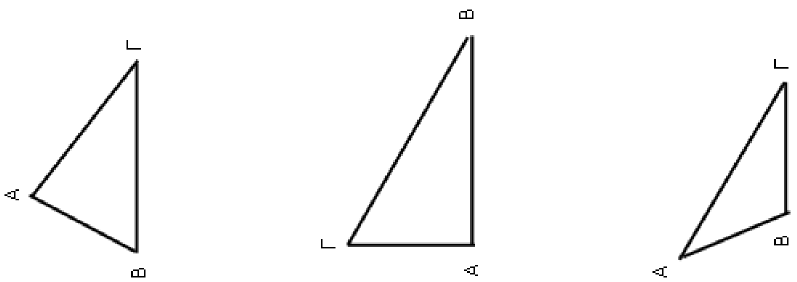


Δραστηριότητα 3η

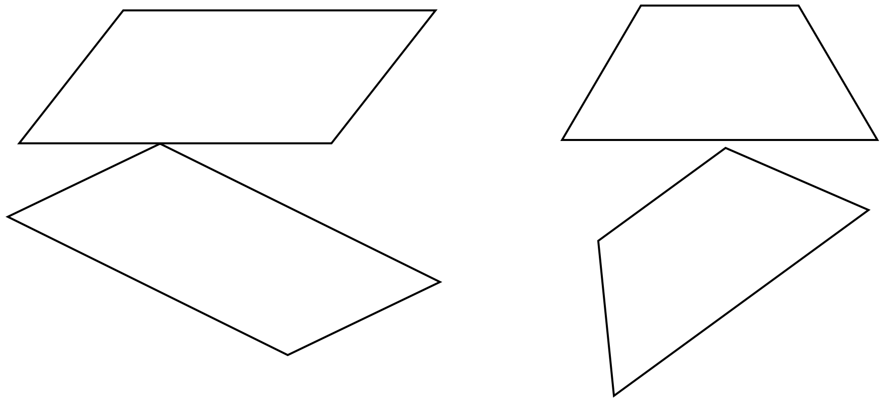
Σχεδίασε με τη χρήση του γνωμόνα, από την κορυφή των τριγώνων (α) και (γ) και την κορυφή Γ του (β) μια κατακόρυφη γραμμή, που είναι το ύψος τους.



- Αν τα τρίγωνα περιστρέφουν, πώς θα στραφεί το ύψος αυτό;

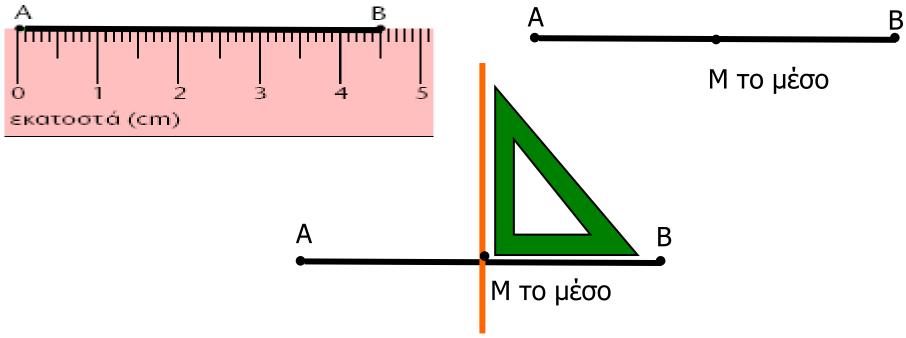


- Κάνε το ίδιο με το παραλληλόγραμμο και το τραπέζιο που ακολουθούν:



Δραστηριότητα 4η

Χάραξε τη μεσοκάθετο σε ένα ευθύγραμμο τμήμα ακολουθώντας τον τρόπο που δείχνει το «σενάριο κατασκευής».



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Σχεδίασε μια ευθεία ε και μια παράλληλη προς αυτήν που να απέχει 2 cm. Υπάρχει και άλλη;

2. Σχεδίασε μια ευθεία ε και ένα σημείο Μ εκτός αυτής. Βρες πάνω στην ευθεία δύο σημεία που ισαπέχουν από το Μ.

Γωνίες		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να διακρίνουν τα είδη των γωνιών (ορθή, οξεία, αμβλεία). Να αναπαράγουν και να κατασκευάζουν γωνίες Να συγκρίνουν γωνίες και να σχηματίζουν γωνίες	Να γνωρίζουν τα είδη των γωνιών, να μπορούν να διαπιστώσουν με το γνώμονα το είδος Να συγκρίνουν γωνίες Να βρίσκουν τη διχοτόμο γωνίας Να γνωρίζουν τις εφεξής γωνίες και διαδοχικές και να βρίσκουν το άθροισμα τους Να γνωρίσουν τις παραπληρωματικές, τις συμπληρωματικές και τις κατακορυφήν γωνίες (και την ισότητά τους)	Διακρίνουν τα είδη των γωνιών Σχεδιάζουν και συγκρίνουν γωνίες Βρίσκουν τη διχοτόμο με πρακτικό τρόπο και μετρήσεις Γνωρίζουν τις διαδοχικές, εφεξής, παραπληρωματικές, συμπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες. Εντοπίζουν τις ιδιότητες σχεδιάζοντας

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Η γωνία αποτελεί μια ιδιαίτερη έννοια που παρουσιάζει παρανοήσεις από τους μαθητές που την αντιλαμβάνονται ως δύο τεμνόμενες ευθείες κι όχι μέρος του επιπέδου και άνοιγμα. Η αντίληψη αυτή οδηγεί τους μαθητές να συγκρίνουν το μέγεθος της γωνίας σύμφωνα με το μέγεθος των πλευρών της.

Το σημαντικό στην ενότητα αυτή είναι να γίνει αντιληπτό το γεωμετρικό αυτό αντικείμενο.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι περισσότερες γνώσεις της ενότητας αυτής είναι γνωστές από μικρότερες τάξεις κι επιδιώκεται να αντιμετωπιστούν οι παρανοήσεις που είναι πιθανό να έχουν δημιουργηθεί.

Αν και απλή έννοια, η «γωνία» επηρεάζεται από τις γνώσεις των μαθητών για τα σχήματα και τα ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις πλευρές της γωνίας ως την ίδια τη γωνία και θεωρούν ότι το μέγεθός της εξαρτάται από το μήκος των πλευρών.

Οι σχέσεις που παρουσιάζονται μεταξύ των γωνιών είναι επίσης απλές, αλλά παρουσιάζουν κάποιες δυσκολίες ιδιαίτερα λόγω της χρήσης πλούσιας ορολογίας.

Διδακτικές υποδείξεις

Για τη διάκριση των ειδών των γωνιών προτείνονται δραστηριότητες ομαδοποίησης που διευκολύνει τους μαθητές να παρατηρήσουν και να θυμηθούν τα είδη των γωνιών.

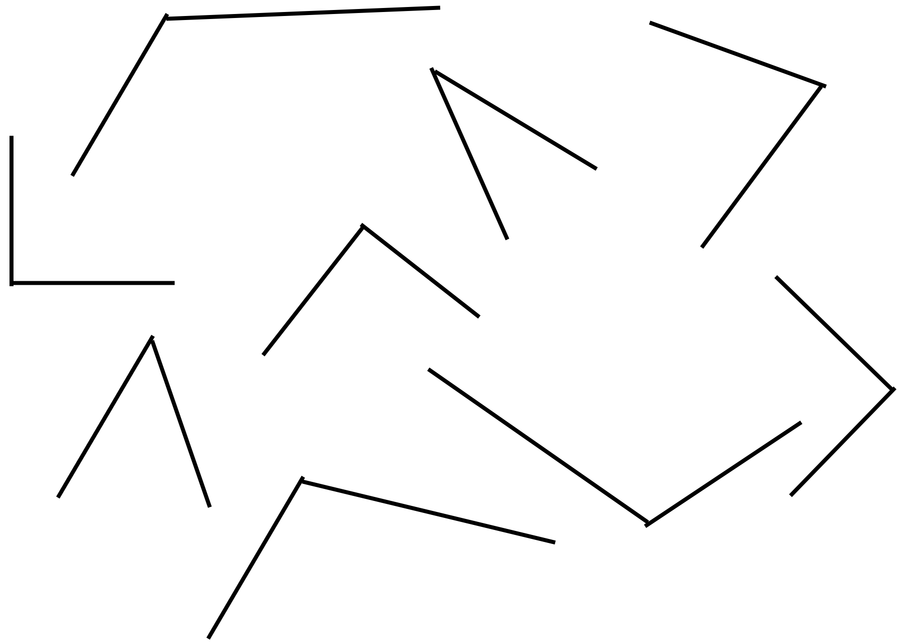
Επιδιώκονται συγκρίσεις γωνιών με τοποθέτηση της μίας πάνω στην άλλη για να γίνει αντιληπτή η σύγκριση. Χρωματισμοί των γωνιών βοηθούν να γίνει αντιληπτή ως μέρος του επιπέδου.

Δεν είναι σκόπιμο να ενθαρρύνεται η εκμάθηση ορισμών αλλά η κατανόηση των σχέσεων των γωνιών.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

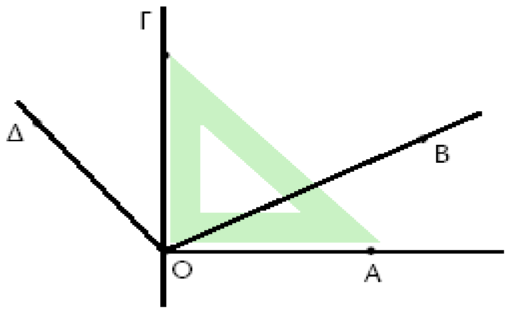
Δραστηριότητα 1η

Χώρισε τις παρακάτω γωνίες σε ομάδες με κοινά χαρακτηριστικά και δώσε όνομα σε κάθε ομάδα. Πώς ονομάζονται οι γωνίες της κάθε ομάδας;



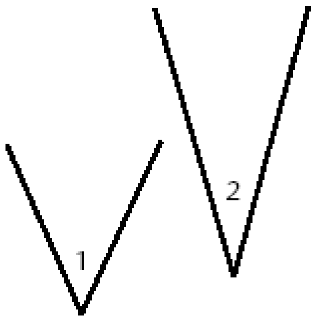
Δραστηριότητα 2η

Στο σχήμα βρες μια οξεία, μια ορθή και μία αμβλεία γωνία.



Δραστηριότητα 3η

Σχεδίασε τις γωνίες (1) και (2) σε διαφανές και σύγκρινε τις.



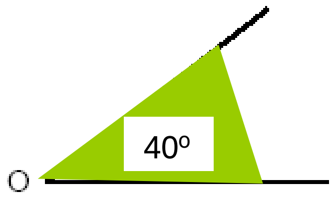
Δραστηριότητα 4η

Σχεδίασε μια γωνία σε διαφανές χαρτί και δίπλωσε το χαρτί ώστε η γωνία να χωριστεί σε δύο ίσες γωνίες.

Δραστηριότητα 5η

Στο παρακάτω σχήμα η γωνία Ο1 είναι 40ο

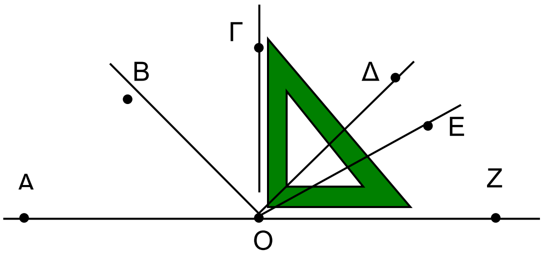
- Χρησιμοποίησε το τρίγωνο για να συμπληρωθεί μια ορθή. Χρωμάτισε τη γωνία που σχηματίζεται (συμπληρωματική).



- Προέκτεινε την οριζόντια γραμμή και βάψε τη γωνία που σχηματίζεται (παραπληρωματική)
- Προέκτεινε και τις δύο ημιευθείες και χρωμάτισε τη γωνία που σχηματίζεται (κατά κορυφή).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Διάλεξε, εξετάζοντας το σχήμα:



	Σωστό	Λάθος
• Η ΓΟ είναι πλευρά της γωνίας ΖÔΓ.	❑	❑
• Η ΖÔΓ είναι ορθή γωνία.	❑	❑
• ΑÔΔ είναι οξεία γωνία.	❑	❑
• ΒÔΖ είναι αμβλεία γωνία.	❑	❑
• ΒÔΓ = ΔÔΓ.	❑	❑

Είδη τριγώνων και τετράπλευρων		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να διακρίνουν τα είδη τριγώνων με τις ιδιότητες.	Να γνωρίζουν τα είδη τριγώνου Να γνωρίζουν τις ιδιότητες ισοσκελών και ισοπλεύρων Να γνωρίζουν το άθροισμα των γωνιών τριγώνου	Να διακρίνουν τα είδη τριγώνων και τις ιδιότητες τους
	Να γνωρίζουν τα είδη των τετράπλευρων και τις ιδιότητές τους	Γνωρίζουν τα είδη των τετράπλευρων και τις ιδιότητές τους

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Τα είδη των τριγώνων και των τετράπλευρο είναι γνωστά από τις μικρότερες τάξεις. Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται η διάκριση των ειδών αυτών με βάση τις ιδιότητές τους.

Ιδιαίτερα για τα τετράπλευρα είναι σημαντική αναγνώριση των ιδιοτήτων τους όπως και οι μεταξύ τους σχέσεις που δημιουργούνται με βάση τις ιδιότητες (πχ. ένα τετράγωνο είναι ένα παραλληλόγραμμο με ίσες πλευρές).

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες, αλλά αντιλαμβάνονται τα σχήματα ολιστικά και με βάση τη γενική τους μορφή, γεγονός που δεν τους βοηθάει να διακρίνουν ιδιότητες και σχέσεις.

Επίσης επειδή τα σχήματα παρουσιάζονται συνήθως σε οριζόντιες και κατακόρυφες θέσεις, δυσκολεύονται να τα διακρίνουν σε άλλες θέσεις.

Διδακτικές υποδείξεις

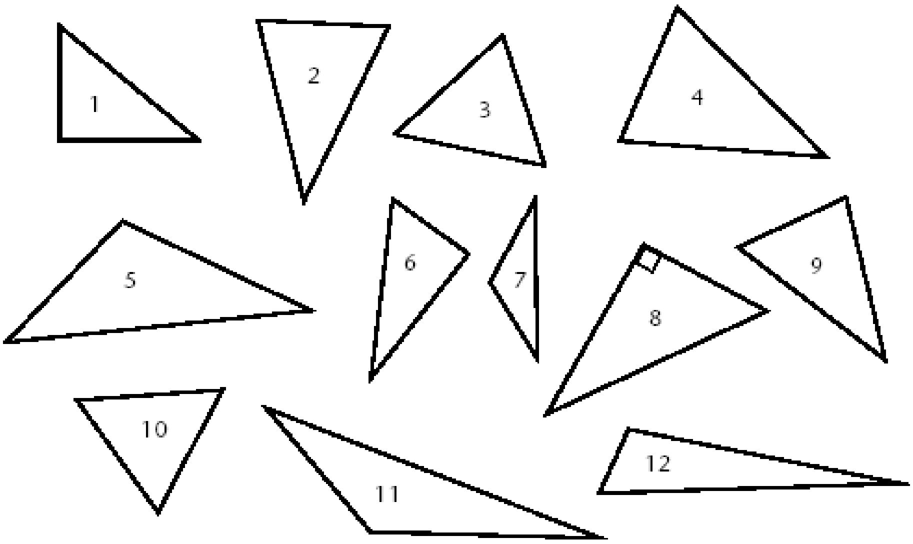
Συγκρίσεις και κατασκευές με διαφορετικά μέσα είναι ο πιο απλός τρόπος για να αντιμετωπίσουν οι μαθητές τις δυσκολίες αυτές (ξυλάκια, γεωπλάνο, ισομετρικός καμβάς κλπ.)

Παράλληλα με τα παραπάνω απαιτούνται δραστηριότητες με αναζήτηση και σύγκριση των ιδιοτήτων, όπως είναι οι ομασοποιήσεις.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

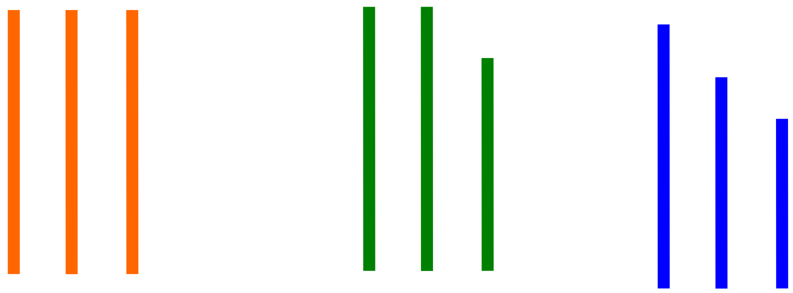
Δραστηριότητα 1η

Χώρισε τα παρακάτω τρίγωνα σε ομάδες με κοινά χαρακτηριστικά και δώσε όνομα σε κάθε ομάδα.



Δραστηριότητα 2η

- Πάρε τρία ίσα ξυλάκια και δοκίμασε να κατασκευάσεις ένα οξυγώνιο, ένα ορθογώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο.
- Πάρε δύο ίσα ξυλάκια και ένα μικρότερο και δοκίμασε να κατασκευάσεις ένα οξυγώνιο, ένα ορθογώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο.
- Πάρε τρία άνισα ξυλάκια και δοκίμασε να κατασκευάσεις ένα οξυγώνιο, ένα ορθογώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο.

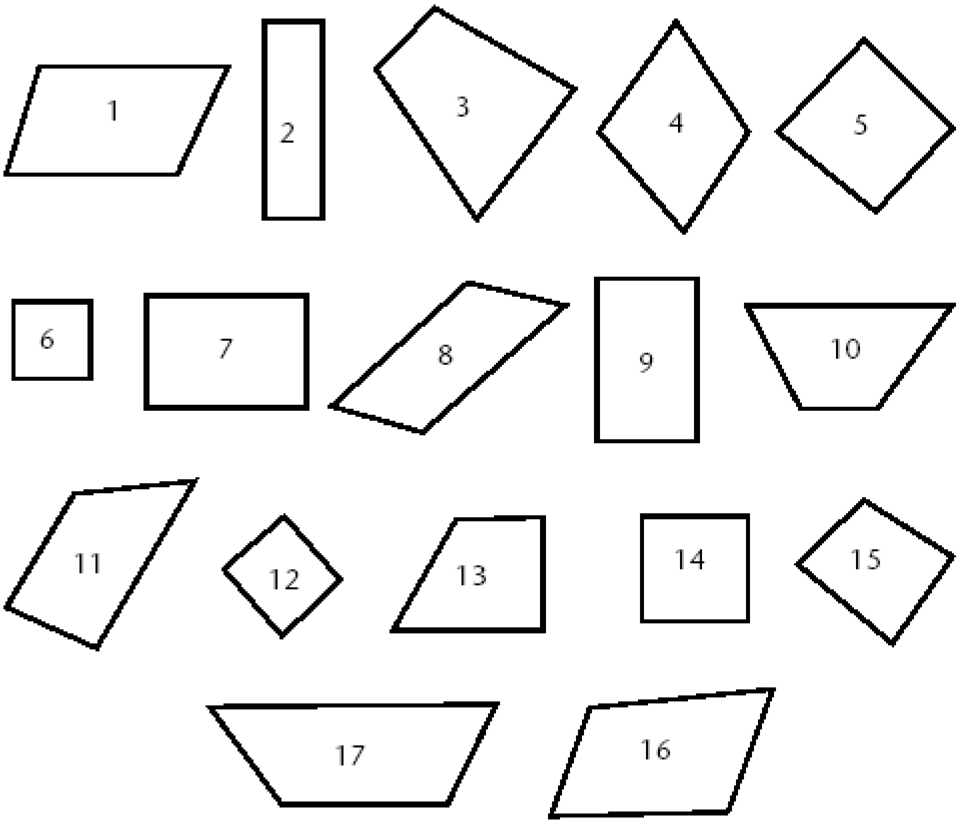


Δραστηριότητα 3η

Με τα γεωμετρικά σου όργανα σχεδίασε ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5 εκατ. Τι τρίγωνο είναι;

Δραστηριότητα 4η

Χώρισε τα παρακάτω σχήματα σε ομάδες με κοινά χαρακτηριστικά και δώσε όνομα σε κάθε ομάδα.

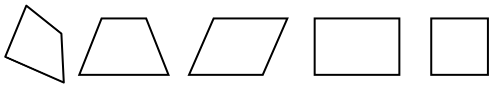
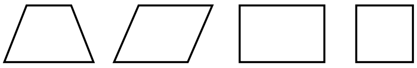
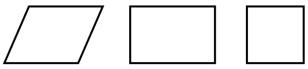
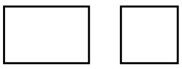
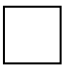


Δραστηριότητα $5^{η}$

Σου δίνονται 5 διαφανείς ταινίες, που όταν τις τοποθετήσεις τη μία πάνω στην άλλη δημιουργείς όλα τα προηγούμενα σχήματα.

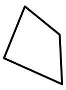
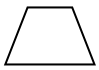
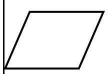
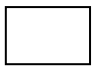
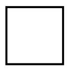
Δραστηριότητα $6^{η}$

Γράψε σε κάθε σειρά ποιες κοινές ιδιότητες έχουν τα σχήματα:

ΣΧΗΜΑΤΑ	**Κοινές ιδιότητες**
	
	
	
	
	

Δραστηριότητα 7η

Στον παρακάτω πίνακα, βάλε ένα **Χ** κάθε φορά που ένα σχήμα έχει την ιδιότητα.

	Τετράπλευρα 	Τραπέζια 	Παραλ/μα 	Ορθογώνια 	Τετράγωνα 
• Τέσσερις (4) πλευρές					
• Δύο (2) πλευρές παράλληλες					
• Απέναντι πλευρές παράλληλες					
• Όλες οι γωνίες ορθές					
• Όλες οι πλευρές ίσες					

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Στην παράγραφο αυτή συναντήσαμε τους όρους: **ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, οξυγώνιο τρίγωνο**. Εξήγησε τους όρους αυτούς μ' ένα σχήμα.
2. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο και υπολόγισε τις οξείες γωνίες του.

3. Μπορεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο να είναι ισόπλευρο;

4. Απάντησε με σωστό ή λάθος στα ερωτήματα:
.

	Σωστό	Λάθος
• Το τετράγωνο είναι ρόμβος.	❑	❑
• Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο.	❑	❑
• Το τραπέζιο είναι παραλληλόγραμμο.	❑	❑
• Ο ρόμβος είναι ορθογώνιο.	❑	❑
• Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο.	❑	❑
• Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο.	❑	❑

Κύκλος - Επίκεντρη γωνία - Θέσεις ευθείες κύκλου		
Στόχοι προηγούμεν ων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Γνωρίζουν τον κύκλο και τα στοιχεία του Χρησιμοποιού ν διαβήτη για να τον χαράξουν	Να κατανοήσουν την έννοια του κύκλου και τα στοιχεία του Να διακρίνουν τον κύκλο και τον κυκλικό δίσκο Να γνωρίσουν την επίκεντρη γωνία και τη σχέση με το αντίστοιχο τόξο και την ισότητα των επίκεντρων (σχεδιασμός με αυτή τη σχέση) Να διακρίνουν αν μία ευθεία είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη, να σχεδιάζουν την εφαπτομένη κύκλου	Διακρίνουν τον κύκλο, τον κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία του. Σχεδιάζουν την εφαπτομένη κύκλου. Διακρίνουν τα τόξα και τις επίκεντρες γωνίες

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

Ο κύκλος ως σχήμα εμφανίζει ιδιαιτερότητες σε σχέση με τα άλλα σχήματα. Αποτελεί ένα σύνολο σημείων που ισαπέχουν από το κέντρο και δύσκολα γίνεται αντιληπτό ως τέτοιο γιατί οι μαθητές τον αντιμετωπίζουν ως συνεχή καμπύλη γραμμή.

Συχνά υπάρχει μια σύγχυση του κύκλου και του κυκλικού δίσκου.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές γνωρίζουν τον κύκλο από μικρότερες τάξεις, άρα το σημαντικότερο στην ενότητα αυτή είναι να προσεγγίσουν την έννοια της κοινής απόστασης από το κέντρο, όπως και τη διάκριση του κύκλου και του κυκλικού δίσκου.

Οι έννοιες των επίκεντρων γωνιών, τόξων και εφαπτομένων είναι απλή αρκεί να μην επιβαρυνθούν με όρους και ορισμούς.

Διδακτικές υποδείξεις

Η χρήση του διαβήτη και οι κατασκευές βοηθούν τους μαθητές για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του κύκλου.

Οι έννοιες της εφαπτομένης και των επίκεντρων γωνιών αντιμετωπίζονται κυρίως με κατασκευές και αποφεύγονται οι ορισμοί.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

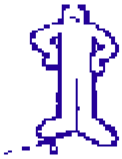
Δραστηριότητα 1η

Στερέωσε ένα κομμάτι σπάγκο και στην άκρη δέσε ένα μολύβι. Κράτησε το σπάγκο τεντωμένο και σχεδίασε το σχήμα που σχηματίζεται.

Κάνε το ίδιο με ένα διαβήτη και χρωμάτισε το εσωτερικό του.

Δραστηριότητα 2η

Για ένα παιχνίδι, όλα τα παιδιά χρειάζεται να σταθούν γύρω από ένα παιδί σε ίσες αποστάσεις. Τι σχήμα θα σχηματίσουν.



Δραστηριότητα 3η

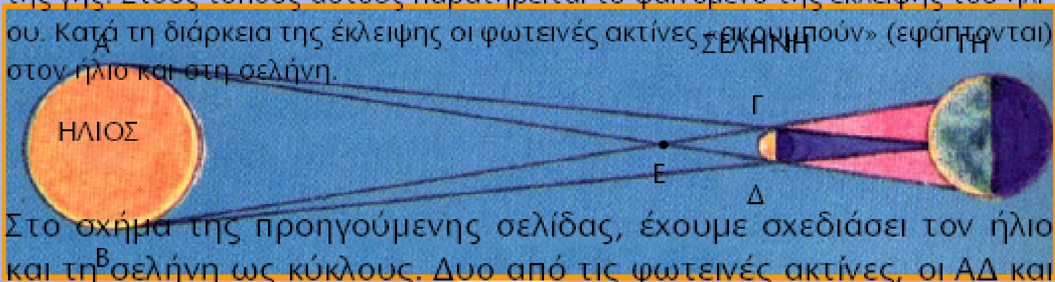
Στον παρακάτω χάρτη σημείωσε όλες τις πόλεις, τα χωριά και τους τόπους που απέχουν από τη Λάρισα απόσταση μικρότερη ή ίση από την απόσταση Λάρισας - Καρδίτσας.

- Σημείωσε έτσι ένα μέρος του χάρτη.
- Από ποια γραμμή περικλείεται το μέρος αυτό και πώς ονομάζεται;

Δραστηριότητα 4η

Ένα από το πιο ενδιαφέροντα φαινόμενα της φύσης είναι οι **εκλείψεις** του ήλιου και της σελήνης. Όταν έχουμε ολική έκλειψη ηλίου ο ουρανός σκοτεινιάζει, φαίνονται τα άστρα, τα άνθη κλείνουν και τα πουλιά και γενικά τα ζώα τρομάζουν γιατί νομίζουν ότι νύχτωσε ξαφνικά. Η διάρκεια της ολικής έκλειψης είναι πολύ μικρή, το πολύ 7 λεπτά.

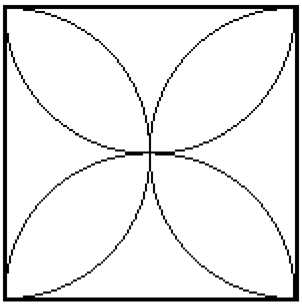
Η έκλειψη παρατηρείται όταν η σελήνη βρεθεί ανάμεσα στον ήλιο και τη γη και οι ακτίνες από τον ήλιο «ακουμπούν» πάνω στη σελήνη. Τότε πίσω από τη σελήνη σχηματίζεται ένας σκοτεινός κώνος, η σκιά της σελήνης, που καλύπτει ένα μέρος της γης. Στους τόπους αυτούς παρατηρείται το φαινόμενο της έκλειψης του ήλιου. Κατά τη διάρκεια της έκλειψης οι φωτεινές ακτίνες «ακουμπούν» (εφάπτονται) στον ήλιο και στη σελήνη.

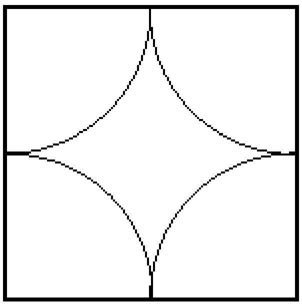


Στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας, έχουμε σχεδιάσει τον ήλιο και τη σελήνη ως κύκλους. Δυο από τις φωτεινές ακτίνες, οι ΑΔ και ΒΓ, τέμνονται στο σημείο Ε. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΑ και ΕΒ είναι οι εφαπτόμενες του ηλίου από το σημείο Ε. Τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι οι εφαπτόμενες της σελήνης από το σημείο Ε.

Δραστηριότητα 5η

5. Χρησιμοποιώντας το διαβήτη σου κάνε τα σχήματα:





Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Τι διαφέρει ένας κύκλος από ένα κυκλικό δίσκο;
2. Πόσα το πολύ κοινά σημεία μπορεί να έχουν:
   - Μία ευθεία και ένα κύκλος.
   - Δύο κύκλοι.
   - Τρεις κύκλοι.

Πάρε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σχεδίασε έναν κύκλο με διάμετρο το ΑΒ.

Συμμετρία

Συμμετρία ως προς άξονα και ως προς σημείο		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να μπορούν να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας	Να αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας Να γνωρίζουν πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς άξονα Να αναγνωρίζουν σχήματα συμμετρικά ως προς σημείο. Να γνωρίζουν πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς σημείο Να γνωρίσουν τις ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων Άξονας συμμετρίας και Κέντρο συμμετρίας Να κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα (ως προς άξονα και ως προς σημείο)	Αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα και εντοπίζουν τον άξονα Γνωρίζουν τις ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων Κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα

Ιδιαιτερότητες των εννοιών

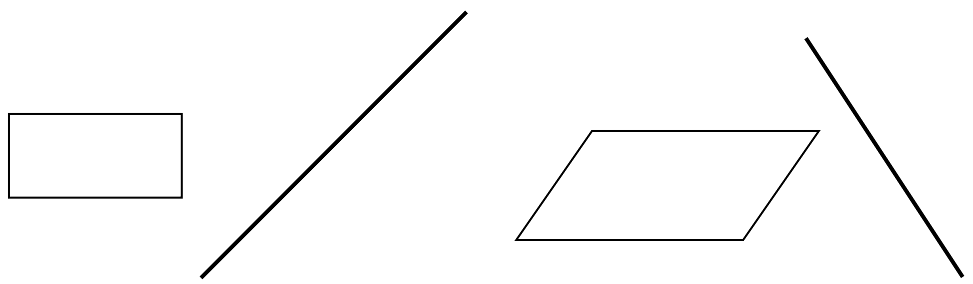
Η συμμετρία ως προς άξονα είναι μια οικεία έννοια η οποία γίνεται άμεσα αντιληπτή. Επιπλέον η δίπλωση ή το καθρέφτισμα που αποτελούν εύκολες δράσεις βοηθούν τους μαθητές να ελέγξουν τη συμμετρία και να εντοπίσουν τον άξονα. Το ενδιαφέρον στην ενότητα αυτή είναι να γίνουν αντιληπτές οι ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων που βοηθούν και τις κατασκευές τους.

Η συμμετρία ως προς σημείο δεν είναι τόσο οικεία αλλά μπορεί να γίνει αντιληπτή ως στροφή 180^{o} η οποία είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί τόσο πρακτικά όσο και νοερά, γεγονός που βοηθάει την ανάδειξη του κέντρου συμμετρίας. Οι ιδιότητες των συμμετρικών ως προς άξονα σχημάτων ισχύει και στην κεντρική συμμετρία, της οποίας το ιδιαίτερο στοιχείο είναι ο προσανατολισμός του σχήματος.

Δυσκολίες των μαθητών

Η αντίληψη των συμμετρικών σχημάτων ή σχημάτων με άξονα συμμετρίας είναι απλή στις κυρίαρχες διευθύνσεις (οριζόντιος και κατακόρυφος άξονας) αλλά δυσκολεύει όταν ο άξονας είναι πλάγιος ή οι πλευρές του σχήματος δεν είναι παράλληλες προς τον άξονα, ιδιαίτερα όσον αφορά τις κατασκευές, όπου οι μαθητές κάνουν μεταφορά αντί για συμμετρία.

Επίσης η ευκολία να αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα συμμετρικά σχήματα δεν οδηγεί με την ίδια ευκολία στην κατασκευή τους, γιατί η ολιστική αντίληψη δεν διευκολύνει τη σημειακή κατασκευή. Το τετραγωνισμένο χαρτί διευκολύνει τις μετρήσεις.



Οι μαθητές είναι πιθανό να μην έχουν ασκηθεί σε νοερούς μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι απαραίτητοι στην κεντρική συμμετρία και για το λόγο αυτό ένα μέρος των δραστηριοτήτων περιλαμβάνει πρακτικές περιστροφές.

Διδακτικές υποδείξεις

Όλες οι δραστηριότητες αναγνώρισης και επιβεβαίωσης της συμμετρίας διευκολύνουν την ανάδειξη ιδιοτήτων. Οι συγκρίσεις βοηθούν τους μαθητές να εντοπίσουν μόνοι τους τις ιδιότητες.

Οι κατασκευές συμμετρικών με άξονα σε διαφανές χαρτί και ο έλεγχος με δίπλωση επιτρέπου τους μαθητές να διαπιστώσουν και να διορθώσουν τις ελλείψεις τους.

Οι κατασκευές συμμετρικών ως προς κέντρο είναι πιο απλές αν οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί να περιστρέφουν τα σχήματα.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

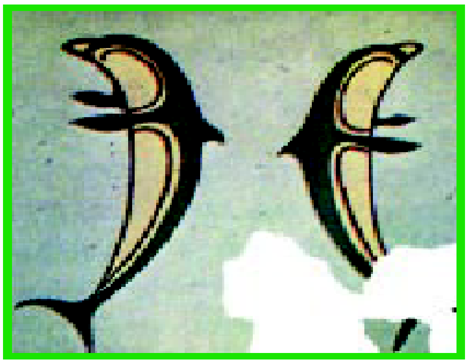
Δραστηριότητα 1η

Οι εικόνες που βλέπεις έχουν όλες ένα κοινό χαρακτηριστικό. Πώς ονομάζονται τα αντικείμενα ή τα σχέδια που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό;

Ολόχρυσο στεφάνι
από το θησαυρό της Βεργίνας
(4ος αι. π.Χ.)

Ποδιά με κέντημα φτιαγμένη
με κουκούλι
(Λαογραφικό μουσείο Κύμης)

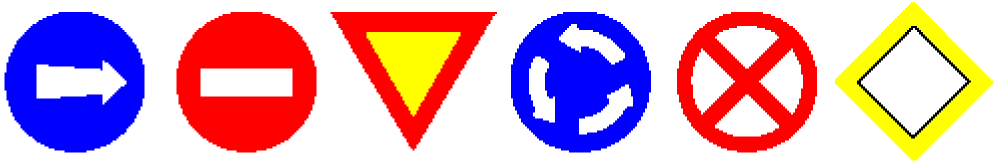
Από σπίτι της Σκοπέλου



Από το μέγαρο της Τύρινθας
(12ος αι. π.Χ.)

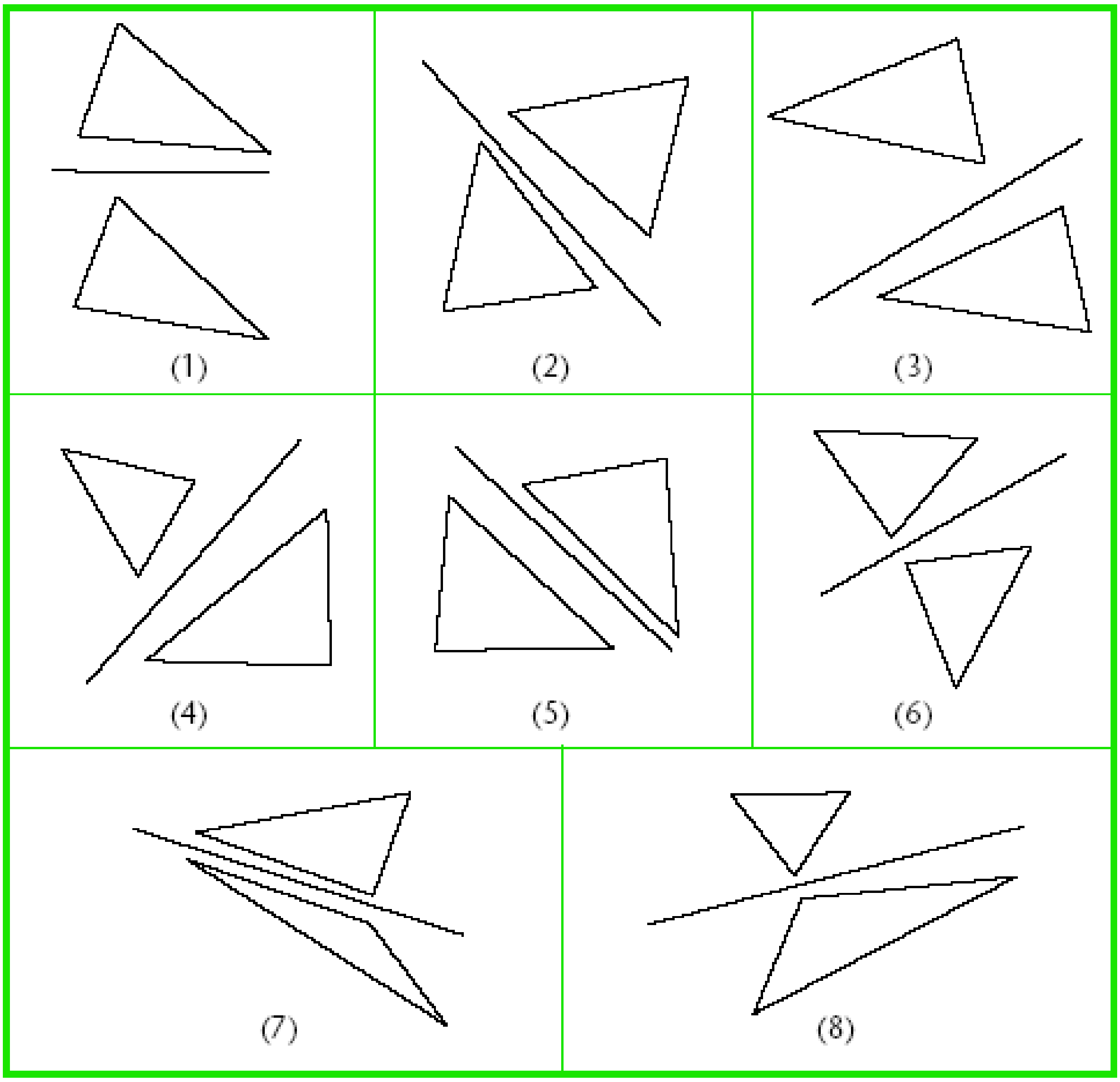
Δραστηριότητα 2η

. Υπάρχουν άξονες συμμετρίας στα σήματα κυκλοφορίας;
Όπου υπάρχουν να τους σχεδιάσεις.



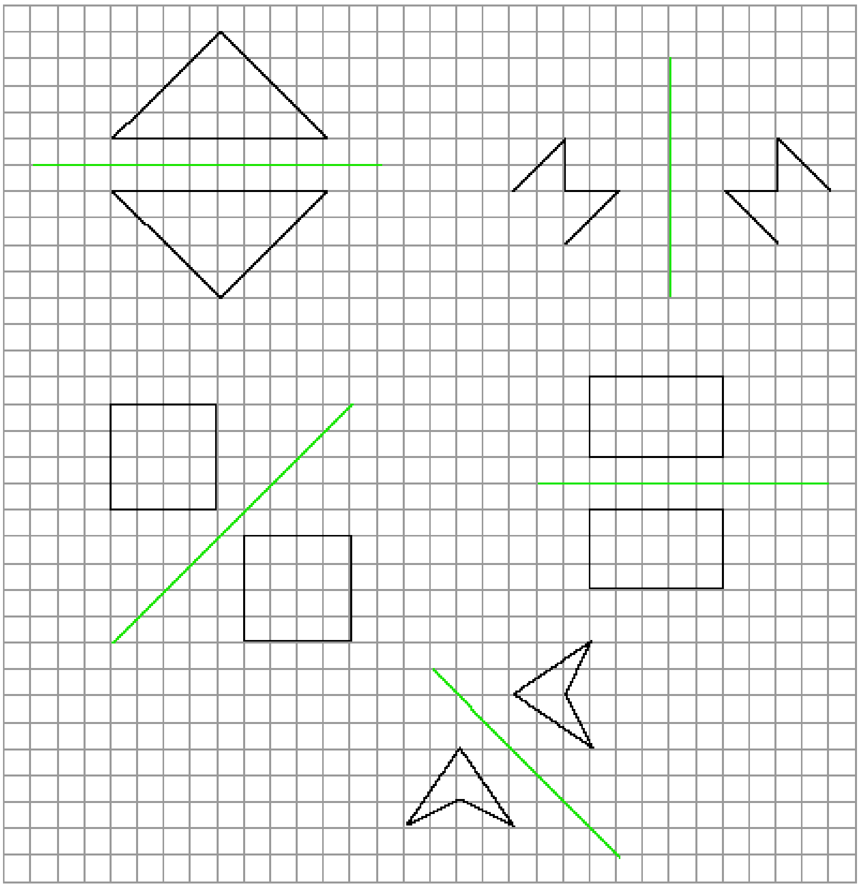
Δραστηριότητα 3η

Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι συμμετρικά και ποια όχι.
Δικαιολόγησε την απάντησή σου.



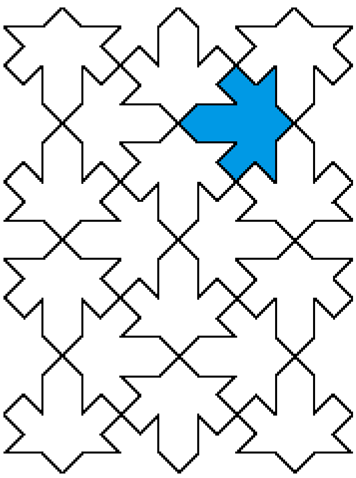
Δραστηριότητα 4η

Στο τετραγωνισμένο χαρτί σχεδίασε τα συμμετρικά. Τι σχήματα είναι;
Ποια είναι η θέση τους ως προς τον άξονα;



Δραστηριότητα 5η

Στο παρακάτω σχήμα βρες και χρωμάτισε τα συμμετρικά ως προς άξονα στοιχεία του σκιασμένου σχήματος και χάραξε τους άξονες συμμετρίας.

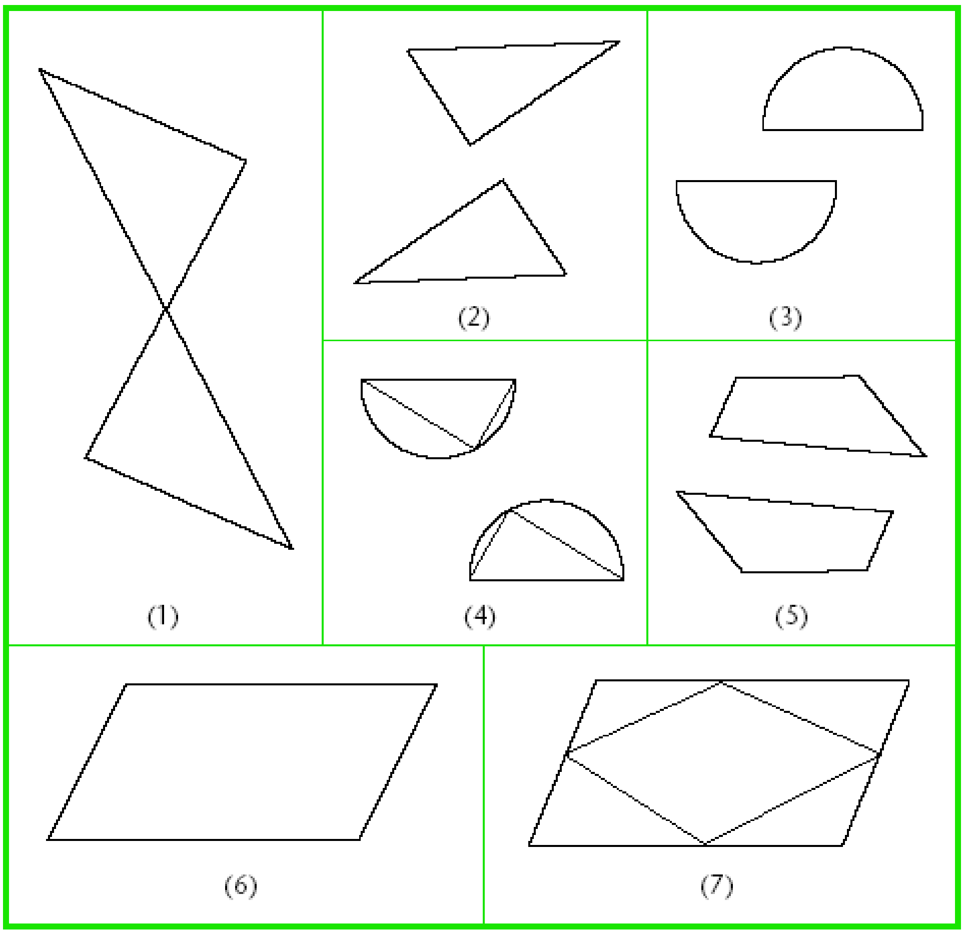


Δραστηριότητα 6^{η}

Αποτύπωσε το σχήμα (α) σε διαφανές χαρτί και προσπάθησε να το περιστρέψεις έτσι που να καλύψει το σχήμα (β) ακριβώς. Για την περιστροφή θα χρειαστεί να καρφιτσώσεις το διαφανές χαρτί σε ένα σημείο.

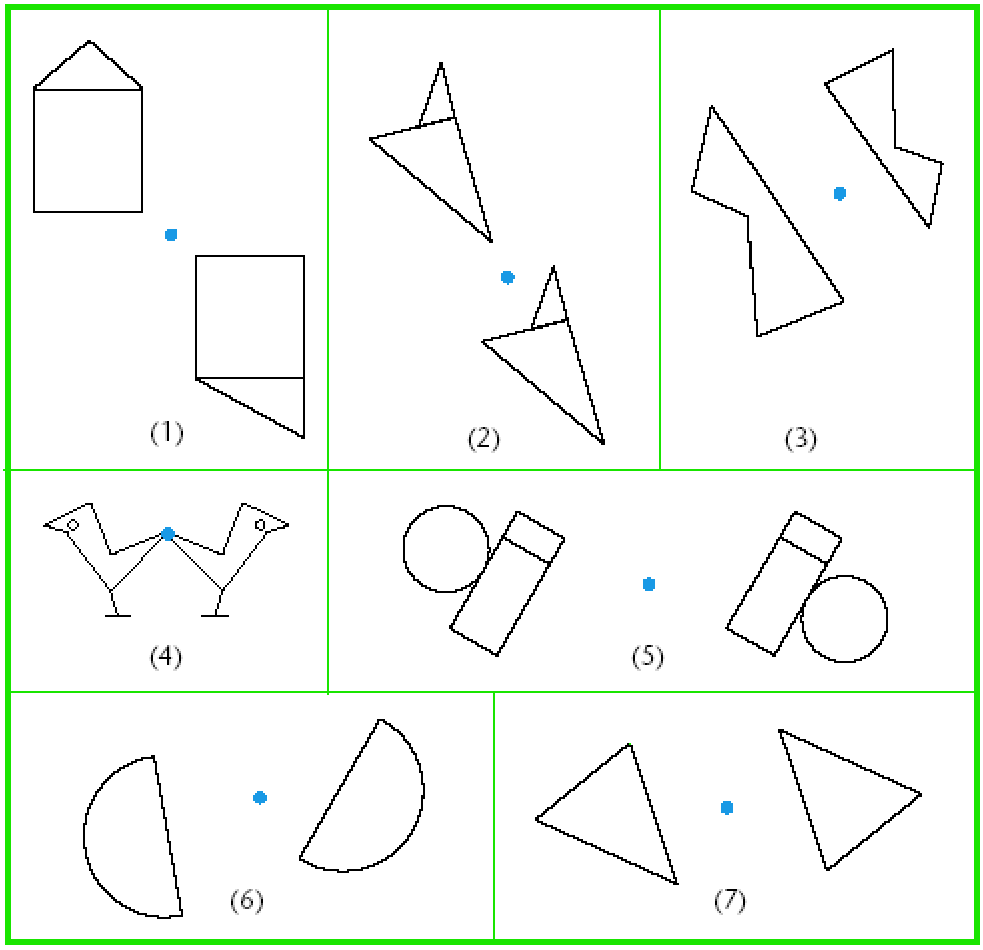
Δραστηριότητα 7^{η}

Προσπάθησε να βρεις τα κέντρα των παρακάτω συμμετρικών σχημάτων χωρίς να χρησιμοποιήσεις αποτύπωση σε διαφανές χαρτί.



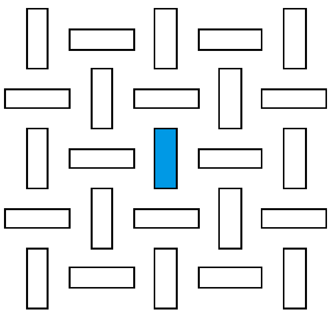
Δραστηριότητα 8η

Σε ποια από τα ρακάτω σχήματαυπάρχει συμμετρία ως προς κέντρο; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
Μπορείς τώρα να καταλήξεις σε κάποια συμπεράσματα:



Δραστηριότητα 9η

Βρες και χρωμάτισε όλα τα ορθογώνια που είναι συμμετρικά, ως προς το κέντρο του σκιασμένου ορθογωνίου και σημείωσε τα κέντρα συμμετρίας.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Το γράμμα Α έχει έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας και το γράμμα Β έναν οριζόντιο. Βρες από ένα ακόμη γράμμα με αυτές
2. Πόσους άξονες συμμετρίας έχει το ισόπλευρο τρίγωνο;
3. Πώς διαπιστώνεις ότι ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας.
4. Πώς διαπιστώνεις ότι δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς κέντρο;
   Βρες ποια από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου έχουν κέντρο συμμετρίας.

Εξισώσεις

Εξισώσεις		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Τελικοί στόχοι για παιδιά με Μ. Δ.**
Να βρίσκει ένα αριθμό που πρέπει να προστεθεί, αφαιρεθεί ή πολ/σιαστεί σε ένα αριθμό για να βρεθεί ένα ορισμένο αποτέλεσμα.	Να κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής και της εξίσωσης. Να ελέγχει αν κάποιος αριθμός είναι λύση Απλές εξισώσεις (α+χ=β, χ-α=β, α-χ=β, αχ=β, χ/α=β και α/χ=β	Χρήση μεταβλητών Αναζήτηση του άγνωστου με νοερούς υπολογισμούς Απλές εξισώσεις σε πραγματικές καταστάσεις

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Η έννοια της εξίσωσης εισάγεται στην μαθηματική εκπαίδευση από την Στ' Δημοτικού. Τα παιδιά μαθαίνουν να χρησιμοποιούν αρχικά κενά και στη συνέχεια γράμματα στη θέση των αριθμών, μαθαίνουν επίσης να χρησιμοποιούν γράμματα σε τύπους όπως π.χ. το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου (Ε=α.β).

Οι εξισώσεις θεωρούνται σημαντικό μαθηματικό εργαλείο το οποίο δεν χρησιμοποιείται μόνο στη λύση αριθμητικών προβλημάτων, αλλά και στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων ή ακόμα κι άλλων προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Συχνά στο θέμα αυτό υπάρχουν δύο παρανοήσεις:

- η ανάπτυξη αλγεβρικών σχέσεων αποτελεί την εξέλιξη των αριθμητικών σχέσεων και
- το σημαντικό ζητούμενο στην ενότητα αυτή είναι να μάθουν οι μαθητές να λύνουν εξισώσεις (γεγονός που οδηγεί διδακτικά να δίνεται μεγάλο βάρος στη διαδικασία λύσης).

Ωστόσο το βασικό ζητούμενο στην ανάπτυξη της κατανόησης από τη μεριά των μαθητών των εξισώσεων είναι η άσκησή τους στο να μετατρέπουν ένα πρόβλημα σε εξίσωση, που σημαίνει να κατανοούν τις σχέσεις που περιγράφονται, να βρίσκουν τρόπους παράστασης αυτών των σχέσεων και τελικά να αναγνωρίζουν το νοήματος που έχει ένα σύμβολο, περισσότερο από τον τρόπο χειρισμού του.

Η εξοικείωση των μαθητών με αυτή τη μορφή «μοντελοποίησης» και «παραστασιοποίησης» φαινομένων θα ήταν απαραίτητο να ξεκινάει από τις πιο μικρές ηλικίες με τη χρήση μέσων που αντιστοιχούν στην κάθε βαθμίδα (αντικείμενα, εικόνες, ζωγραφιές και αργότερα σύμβολα).

Η άσκηση αυτή βοηθάει βαθμιαία τα παιδιά να παριστάνουν καταστάσεις και προβλήματα που τους επιτρέπουν να τις λύσουν πολύ πριν εισαχθούν στην έννοια της εξίσωσης.

Με την έννοια αυτή είναι απαραίτητο να προταθούν δραστηριότητες και καταστάσεις που αναπτύσσουν δύο διαφορετικά διαστάσεις:

1. Την εισαγωγή των συμβόλων και το νόημά τους.
2. Την εισαγωγή της εξίσωσης και του νοήματος της λύσης της.

Η ανάπτυξη αυτή αντιμετωπίζεται από την αρχή.

Δυσκολίες των μαθητών

Υπάρχουν πολλά και διαφορετικά στοιχεία της εξίσωσης που δημιουργούν στα παιδιά ιδιαίτερες δυσκολίες, όπως αυτές αναδεικνύονται από πολλών χρόνων έρευνες (Tall, 1996).

- Ένα πρώτο πρόβλημα δημιουργείται με την έννοια και τη χρήση της μεταβλητής. Η χρήση γραμμάτων σε διαφορετικές μαθηματικές καταστάσεις αποτελεί ένα πρώτο παράγοντα δυσκολιών. Οι μαθητές ξεκινούν από τις μικρότερες τάξεις με τη χρήση κενών ή αργότερα γραμμάτων (___ + 5 = 8, Χ+5=8), δημιουργώντας την αντίληψη ότι το κενό ή το γράμμα βρίσκεται στη θέση ενός αριθμού. Αργότερα, οι μαθητές χρησιμοποιούν τύπους, δημιουργώντας την αντίληψη ότι το γράμμα μπορεί να πάρει διαφορετικές αριθμητικές τιμές.

  Ο ρόλος της μεταβλητής στην εξίσωση είναι διαφορετική και από τις δύο αντιλήψεις γιατί αποδίδει το συμβολικό τρόπο να αποδωθούν αριθμητικές ή άλλες σχέσεις σε μια πορεία παράστασης συγκεκριμένων σχέσεων.
- Ένα δεύτερο πρόβλημα δημιουργείται με την λειτουργία των πράξεων και της ισότητας (Kieran, 1981). Και στις δύο περιπτώσεις οι κυρίαρχες αντιλήψεις των μαθητών είναι ότι πρέπει να εκτελέσουν μια πράξη ή να κάνουν κάτι, όπως συμβαίνει με πράξεις και ισότητες της μορφής: 15 + 2.8 = 15 + 16 = 31.

  Στην αντιμετώπιση και λύση ενός προβλήματος, η εισαγωγή γραμμάτων δυσκολεύει αντί να απλοποιήσει την λύση και οι μαθητές δεν κατανοούν πώς μπορούν να γίνουν πράξεις με γράμματα και ποιες πράξεις μπορούν να γίνουν.

Ιδιαίτερες διδακτικές υποδείξεις

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι δραστηριότητες που προτείνονται στους μαθητές γίνονται με στόχο – όχι να αλλάξει κάτι που έχουν μάθει με τους αριθμούς – αλλά να αναπτύξουν μια κατάλληλη για την ενότητα αυτή γνώση.

Με βάση λοιπόν όσα αναφέρθηκαν προηγούμενα για τις ιδιαιτερότητες των εννοιών και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, και ιδιαίτερα τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, γίνεται σαφές ότι οι έννοιες της μεταβλητής και του αγνώστου εκκινούν και για την ηλικία αυτή με πραγματικές καταστάσεις και στηρίζονται σημαντικά στους νοερούς υπολογισμούς.

- Ο συμβολισμός αναπτύσσεται παράλληλα με την ανάπτυξη της έννοιας της εξίσωσης.
- Επιδιώκεται εξοικείωση με την αλγεβρική μεταφορά λεκτικών καταστάσεων.
- Προτείνονται πραγματικές καταστάσεις που αναδεικνύουν τη σημασία χρήσης εξισώσεων και δίνουν νόημα στη διαδικασία λύσης της.
- Η λύση της εξίσωσης δεν προβάλλεται σαν μία τυπική διαδικασία αλλά μια συστηματική αντιμετώπιση με κατανοητά παραδείγματα.

Ενδεικτικές εναλλακτικές δραστηριότητες

1. Χρήση μεταβλητής

Δραστηριότητες που παρουσιάζουν με συμβολική μορφή τις προτάσεις:

- Ένας αριθμός αυξημένος κατά 24.
- Το άθροισμα ενός αριθμού και του 15.
- Ένας αριθμός ελαττωμένος κατά 8.

Δραστηριότητες που αποδίδουν με μαθηματική μορφή λεκτικές εκφράσεις και το ανάποδο.

- Με τη χρήση μιας μεταβλητής γράψε μια ισότητα που να περιγράφει την πρόταση:
  Η διαφορά ενός αριθμού από το 12 είναι ίση με 3.

2. Εξοικείωση με την εύρεση αγνώστων με νοερούς συλλογισμούς

Δραστηριότητα 3η

Συμπλήρωσε τα κενά:

- Από την ισότητα 5 + 7 = 12 προκύπτουν οι ισότητες
  12 - ___ = 5 και 12 - ___ = 7
- Από την ισότητα 15 - 6 = 9 προκύπτουν οι ισότητες
  9 + ___ = 15 και 15 - ___ = 6
- Από την ισότητα x - 5 = 8 προκύπτει η ισότητα:
  x = ___ + ___
- Από την ισότητα 13 - α = 7 προκύπτει η ισότητα:
  α = ___ - ___

Δραστηριότητα 4η

Αναζήτησε τους αριθμούς που λείπουν στο σχήμα, όπου στο πάνω τετράγωνο ο αριθμός είναι το άθροισμα των κάτω τετραγώνων:

	?		
	3	4	
?	1	1	3

Δραστηριότητα 5η

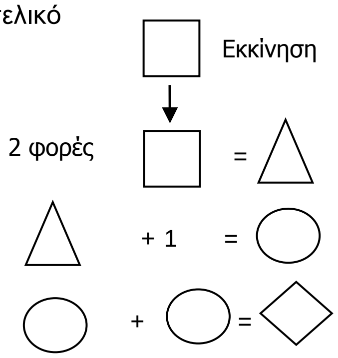
Μαγικό λέγεται ένα τετράγωνο όπου το άθροισμα των αριθμών οριζόντια, κάθετα και διαγώνια είναι ίδιο. Συμπλήρωσε στο παρακάτω μαγικό τετράγωνο τους αριθμούς που λείπουν.

2	?	3
3	4	3
?	1	1

3. Εξοικείωση με τα σύμβολα

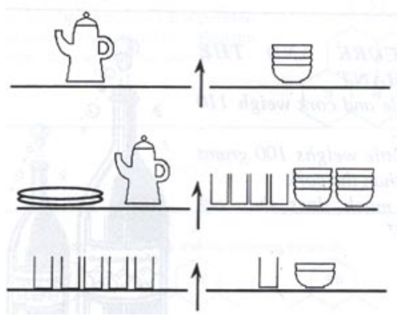
Δραστηριότητα 6η

Αν ξεκινήσω με 2 (4, 5, 12, ..) πόσο θα είναι το τελικό αποτέλεσμα?



Δραστηριότητα 7η

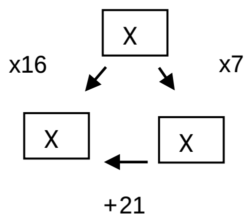
Βάζουμε μια καφετιέρα, φλιτζάνια, και πιατάκια και ποτήρια σε μία ζυγαριά όπως δείχνουν οι εικόνες:



- Αν στη μία μεριά βάλεις την καφετιέρα, στην άλλη πόσα ποτήρια χρειάζεται να βάλεις;
- Αν στη μία μεριά βάλεις την καφετιέρα, στην άλλη πόσα πιάτα χρειάζεται να βάλεις;
- Αν στη μία μεριά βάλεις την καφετιέρα, στην άλλη πόσα φλιτζάνια χρειάζεται να βάλεις;

Δραστηριότητα 8η

Υπολόγισε το χ στο παρακάτω σχήμα:



Ποσοστά		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Τελικοί στόχοι για παιδιά με Μ. Δ.**
Η έννοια και το σύμβολο του ποσοστού ως λόγος, πηλίκο και δεκαδικός	Κατανόηση της έννοιας του ποσοστού ως ειδική περίπτωση αναλογίας	Εύρεση του μέρους ενός όλου, σύγκριση Αναγνώριση και γραφή των ποσοστών Λύση απλών προβλημάτων με ποσοστά

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Τα ποσοστά καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος καθημερινών καταστάσεων και αποτελούν σημαντική γνώση για τα παιδιά της ηλικίας αυτής. Τα ποσοστά εισάγονται από την Στ' τάξη του Δημοτικού.

Η έννοια του ποσοστού συνδέεται στενά με τις έννοιες των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών και αποτελούν μια συμβολική παράσταση του εκατοστού. Η βασική τους λειτουργία είναι η δυνατότητα συγκρίσεων ανομοιογενών ποσοτήτων και για τα λόγο αυτό είναι σημαντικό να στηριχθούν πάνω σε αυτή την αναγκαιότητα μέσα από καθημερινά προβλήματα.

Η συμβολική τους παράσταση προέρχεται από τους δεκαδικούς (π.χ. 15% είναι μια απλούστερη παράσταση του 0,15) και αντιστοιχεί στο αντίστοιχο δεκαδικό κλάσμα (15/100).

Ο συνδυασμός των τριών αυτών μορφών παράστασης είναι και το πιο σημαντικό στοιχείο στην κατανόηση των ποσοστών.

Μια επιπλέον ιδιαίτερη διάσταση αποτελούν τα προβλήματα των ποσοστών. Τα προβλήματα αυτά συνδυάζουν ένα μέρος, ενός όλου και το ποσοστό που το εκφράζει, το οποίο συνδυάζεται με το μέρος ή το όλο.

Ανάλογα με τον τύπο του συνδυασμού αυτού κλιμακώνονται και οι δυσκολίες των μαθητών. Για παράδειγμα είναι απλούστερο να εντοπίσει ένας μαθητής πόσο τοις 100 είναι τα 15 αγόρια μιας τάξης στο σύνολο των 30 παιδιών, από το να υπολογίσει αν η τιμή ενός προϊόντος είναι 75 € και το αγοράζουμε 65 € πόση έκπτωση έχει γίνει.

Η βασική έννοια πάνω στην οποία στηρίζεται η έννοια του ποσοστού είναι αυτή του λόγου και των αναλογιών. Κατά συνέπεια, η κατανόηση και η χρήση του στηρίζεται κατά πολύ σε αυτή και τη μετατροπή της σε μία πιο εύκολη στην ανάγνωση αριθμητική μορφή.

Δυσκολίες των μαθητών

Η έννοια του ποσοστού δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη και μάλιστα το % χρησιμοποιείται για να απλοποιήσει την πιο σύνθετη μορφή που είναι πχ. το 0,03.

Ωστόσο οι μελέτες δείχνουν ότι οι μαθητές δεν συνδυάζουν τις δύο μορφές παράστασης (δεκαδική και κλασματική) με την παράσταση του ποσοστού, γεγονός που αποτελεί ένα από τα σημαντικά διδακτικά αιτούμενα. Συχνά ακόμα και ενήλικες χρησιμοποιούν την «απλή μέθοδο των τριών» ως μηχανιστικό τρόπο εύρεσης του ποσοστού, καταδεικνύοντας μια χωρίς νόημα χρήση του.

Μετά την κατανόηση της μορφής 0,03 και του τρόπου εύρεσης του ποσοστού, η σημαντικότερη δυσκολία εντοπίζεται στα προβλήματα ποσοστών. Στις δυσκολίες αυτές θα πρέπει να διαχωρισθούν:

- η λεκτική κατανόηση του προβλήματος, των δεδομένων και των ζητούμενων.
- Το είδος του προβλήματος και της αναφοράς του ποσοστού.

Διδακτικές υποδείξεις

Τα βήματα στα οποία μπορεί να αναλυθεί μια διδακτική προσέγγιση είναι τα ακόλουθα:

- *Τη χρήση του ποσοστού για τη σύγκριση των μερών ενός όλου .*
- *Στη χρήση του κλάσματος ή του δεκαδικού για τη σύγκριση αυτή.*
- *Στο πέρασμα από το κλάσμα και το δεκαδικό στο % και αντίστροφα.*
- *Στην λύση προβλημάτων με ποσοστά*

Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται προβλήματα συγκρίσεων που αρχικά το 100 αποτελεί τον κοινό παρονομαστή και στη συνέχεια αναδεικνύεται η αναγκαιότητα αυτή.

Αν και η δυσκολία περάσματος από το δεκαδικό ή το κλάσμα στο % αποτελεί ένα ζήτημα κατανόησης αριθμητικών εννοιών, η άσκηση στη διαδικασία αυτή είναι απολύτως αναγκαία. Η χρήση της αριθμομηχανής μπορεί να είναι πολύ βοηθητική.

Ενδεικτικές εναλλακτικές δραστηριότητες

Δοκιμάζουμε την απλοποίηση των δραστηριοτήτων που δίνονται από το βιβλίο σε όλη την τάξη με τους ακόλουθους τρόπους:

Δραστηριότητες για το νόημα και τη δημιουργία του ποσοστού, προτείνονται απλά παραδείγματα και οι μαθητές περιγράφουν αυτό που κατανοούν. Πχ. Τι σημαίνει έκπτωση 10%, όταν σε ένα κατάστημα κάνουν έκπτωση 20%, πώς θα βρούμε τι θα πληρώσουμε στα 100 €.

Δραστηριότητες για την ανάγκη της χρήσης ποσοστού στις συγκρίσεις. Για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ξεκινάμε από πολύ μικρούς και σχετικούς με το 100 αριθμούς. Πχ. Οι μαθητές δύο τμημάτων της Α' τάξης έγραψαν διαγώνισμα στα Μαθηματικά. Από τους 50 μαθητές του Α1, οι 24 έγραψαν άριστα, ενώ από τους 25 μαθητές του Α2, άριστα έγραψαν οι 15. Ποιο τμήμα πήγε καλύτερα;

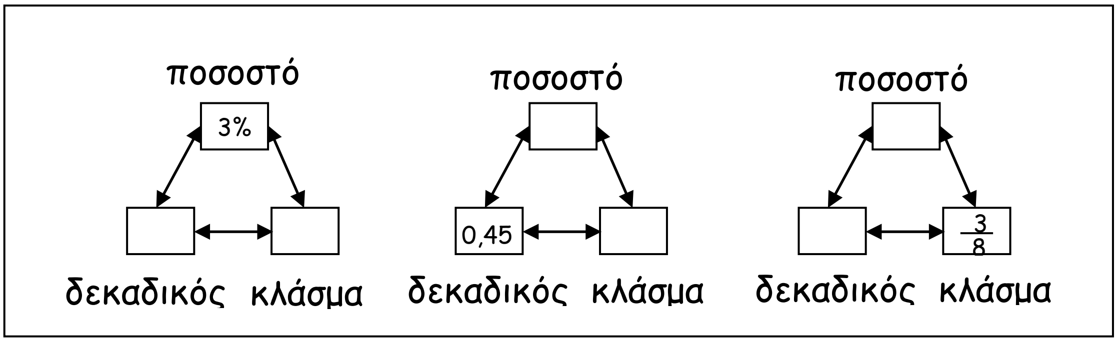
Δραστηριότητες όπου δίνονται συγκρίσεις με άλλους αριθμούς, π.χ. σε μία τάξη 25 μαθητών, τα 15 είναι κορίτσια. Να γράψεις τον αριθμό των κοριτσιών ως ποσοστό (%) της τάξης; Κάνε το ίδιο για τον αριθμό 17 στα 50, Κάνε το ίδιο για τον αριθμό 3 στα 10, Κάνε το ίδιο για τον αριθμό 12 στα 33

Δραστηριότητες σύνδεσης των τριών μορφών:

Κλάσμα	Δεκαδικός	Ποσοστό
85/100		
	0,32	
		47%
	0,06	
		8%

- Το κλάσμα 10/100, 25/100, 45/100, 8/100 τι ποσοστό (%) είναι;
- Το κλάσμα 12/50, 20/50, 3/50, 7/50 τι ποσοστό (%) είναι;
- Το κλάσμα 4/10, 6/20, 25/40, 45/75 τι ποσοστό (%) είναι;

Δραστηριότητες με μετατροπές:



Δραστηριότητες εφαρμογών

- Σε ένα κατάστημα, στην περίοδο των εκπτώσεων, βλέπεις την παρακάτω πινακίδα: Τι ποσοστό (%) είναι η έκπτωση;

~~8400~~

5040

- Ένας καταστηματάρχης θέλει να κάνει έκπτωση 25% στα είδη του. Να τον βοηθήσεις να συμπληρώσει την πρώτη πινακίδα με τη νέα τιμή πώλησης; Να του προτείνεις ένα τρόπο να βρίσκει τις τιμές με την έκπτωση;

~~16000~~

Ενδεικτικές νοερές δραστηριότητες

Στις δραστηριότητες αυτές είναι σημαντικό να εντάξουμε ευρέσεις ποσοστών άλλων κατηγοριών ποσοτήτων, με απλές αριθμητικές μορφές και κυρίως υπολογισμούς με το νου, όπως:

- Πόσα λεπτά είναι το 20% του €.
- Πόσα γραμμάρια είναι το 50% του κιλού;
- Πόσα μέτρα είναι το 25% του χιλιόμετρου;
- Τα 250, 500, 750 γραμμάρια, τι ποσοστό του κιλού είναι;
- Τα 500, 50 μέτρα (100, 200, 400, 80) τι ποσοστό του χιλιόμετρου είναι;
- Τα 75 λεπτά, τι ποσοστό του € είναι;

Λόγοι, Αναλογία, Αντίστροφη αναλογία		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Τελικοί στόχοι για παιδιά με Μ. Δ.**
Έννοια του λόγου και της αναλογίας Εύρεση αγνώστου σε μια αναλογία Αναγνώριση καταστάσεων με απλά προβλήματα ανάλογων ποσών Αναγνώριση καταστάσεων με αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Κατανόηση του λόγου και της αναλογίας Εύρεση 4ης αναλόγου Συμπλήρωση πίνακα ανάλογων ποσών, εύρεση του συντελεστή αναλογίας Γραφική παράσταση μιας σχέσης αναλογίας Λύση προβλημάτων με τις ιδιότητες των ανάλογων ποσών. Διάκριση αντιστρόφως ανάλογων ποσών, πίνακες και γραφική παράσταση. Λύση προβλημάτων με τις ιδιότητες των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.	Σύγκριση μεγεθών με λόγους Ισότητα λόγων Απλές σχέσεις αναλογιών, πίνακες και εύρεση του συντελεστή Γραφική παράσταση Απλές σχέσεις αντίστροφης αναλογίας.

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Η χρήση των λόγων και των αναλογιών είναι πολύ συνηθισμένη στην καθημερινή ζωή και στην αντιμετώπιση προβλημάτων. Για το λόγο αυτό αποτελεί ένα σημαντικό ζητούμενο η εξοικείωση των παιδιών με την οργάνωση και παράσταση δεδομένων (πίνακες, γραφικές παραστάσεις) και την εύρεση των σχέσεων ανάμεσα σε μεγέθη.

Πολλά προβλήματα που θα συναντήσουν οι μαθητές στην καθημερινή ζωή, όπως κι άλλα γνωστικά αντικείμενα (φυσική, χημεία, κλπ.) αντιμετωπίζονται με αναλογίες. Παράλληλα πολύ σημαντικά φαινόμενα όπως η προβολή, η μεγένθυνση/σμίκρυνση, οι κλίμακες στηρίζονται σε λόγους και αναλογίες.

Η αναλογία αποτελεί μια ειδική μορφή σχέσης ανάμεσα σε ποσότητες ή μεγέθη και η χρήση της είναι το κύριο στοιχείο αυτής της ενότητας.

Η προσέγγισή της γίνεται από απλά προβλήματα σύγκρισης μεγεθών (μήκος, επιφάνεια, βάρος, χρήματα, χρόνος, συνταγές, ποσοτικές καταστάσεις) με τη βοήθεια των λόγων και της σύγκρισης των λόγων. Η αναγνώριση της σχέσης της αναλογίας προϋποθέτει την εξοικείωση των μαθητών με τα κλάσματα και στηρίζεται κυρίως στη χρήση πινάκων τιμών και στην προσέγγιση της έννοιας του πολλαπλασιαστή.

Για παράδειγμα, σε ένα κοινό πρόβλημα αναλογίας όπως 1 κιλό μήλα στοιχίζουν 2 €, τα 2, 3, … μήλα πόσο στοιχίζουν, η χρήση του πίνακα τιμών

κιλά	1	2	3	4
Τιμή €	2	4	6	8

Επί 2

βοηθάει τους μαθητές να καταλάβουν τη σχέση αλλά και την ισότητα των λόγων.

Δυσκολίες των μαθητών

Η έννοια της αναλογίας παρουσιάζεται στους μαθητές από την Στ' Δημοτικού ακριβώς γιατί είναι οικεία από πολλές και διαφορετικές, καθημερινές καταστάσεις. Ωστόσο εντοπίζονται δύο στοιχεία που χρειάζονται ιδιαίτερη αντιμετώπιση γιατί δυσκολεύουν τους μαθητές να προσεγγίσουν την έννοια της αναλογίας.

Η πρώτη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές είναι η αντιμετώπιση της αναλογίας ως προσθετικής και όχι ως πολλαπλασιαστικής κατάστασης. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι συχνά στην αντίληψη τους η σύγκριση μεγεθών στηρίζεται στο μεγαλώνω (προσθέτω) ή μικραίνω (αφαιρώ) και όχι σε πολλαπλασιασμό (φορές μεγαλύτερο). Έτσι, για παράδειγμα, συγκρίνοντας δύο μεγέθη αντιλαμβάνονται μια προσθετική σχέση και όχι μια πολλαπλασιαστική.

Στο παραπάνω σχήμα, θα ήταν πιθανό να αντιληφθούν ότι προστέθηκαν δύο ακόμα και όχι τριπλασιάστηκε. Όμοια σε ένα πρόβλημα της μορφής «3 κιλά πορτοκάλια κάνουν 6 €, πόσο κάνουν τα 5 κιλά», θα μπορούσαν να απαντήσουν (3+2) 5 κιλά κάνουν (6+2) 8 €.

Το δεύτερο ζήτημα που είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε είναι ότι όταν αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την αναλογία τότε αντιμετωπίζουν όλες τις σχέσεις ως αναλογίες.

Διδακτικές υποδείξεις

Πολύ συχνά οι διδακτικές προσεγγίσεις για την έννοια της αναλογίας στηρίζονται στην υπόδειξη κανόνων και διαδικασιών (όπως άλλωστε είναι και η απλή μέθοδος των τριών) κι όχι στην προσέγγιση της ισότητας των λόγων. Η πρώτη μας, κατά συνέπεια, προσπάθεια είναι να δώσουμε στα παιδιά απλές και καθημερινές καταστάσεις και προβλήματα από διαφορετικές κατηγορίες όπου χρησιμοποιούνται λόγοι για τη σύγκριση και έτσι γίνεται κατανοητή η πολλαπλασιαστική σχέση (πόσες φορές μεγαλύτερο ή μικρότερο).

Η χρήση των πινάκων και της έννοιας του πολλαπλασιαστή, μπορούν να στηρίξουν την εισαγωγή στην έννοια της ισότητας των λόγων και της αναλογίας, κυρίως μέσα από πολύ οικεία προβλήματα όπως είναι οι τιμές των προϊόντων, οι λογαριασμοί, τα ποσοστά, η ταχύτητα κλπ.

Για το λόγο αυτό προτείνεται η χρήση του πίνακα που όπως αναφέρθηκε στηρίζει την αντίληψη των λόγων, αλλά μέσα από την επέκτασή τους, στις επόμενες τάξεις θα βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν, έστω και διαισθητικά, τη σχέση.

Το αντιστρόφως ανάλογο να γίνει πρώτα κατανοητό με το νου, σε πραγματικά προβλήματα πολύ οικεία στα παιδιά που αναδεικνύουν αυτή τη σχέση: για παράδειγμα «ο πατέρας δίνει 60 € στα δύο του παιδιά, τη βδομάδα, πόσα δίνει το κάθε παιδί; Αυτή όμως τη βδομάδα τους επισκέφτηκε κι ένας ξάδερφος και χρειάζεται να μοιραστούν τα ίδια λεφτά, πόσα θα πάρουν; Αν έρθει μαζί κι η ξαδέλφη, πόσα θα πάρει το κάθε παιδί;»

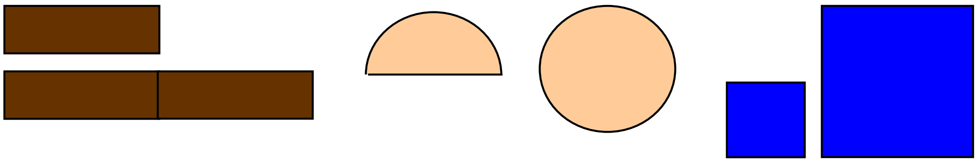
Γενικότερα χρησιμοποιούμε προβλήματα που αναδεικνύουν την σταθερότητα ενός ποσού που μοιράζεται σε 1, 2, 3, .. μέρη (όπως χρόνος για ένα έργο, φαγητό σε κάποιες μέρες κλπ)

Ενδεικτικές εναλλακτικές δραστηριότητες

1. Συγκρίσεις μεγεθών με λόγους

Δραστηριότητες συγκρίσεων με λόγους (χρησιμοποιούνται μικροί αριθμοί για να επικεντρωθεί η προσοχή των παιδιών στη σύγκριση και όχι στις πράξεις)

- πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η σοκολάτα, η πίτσα, το σχήμα;



- Ο Κώστα έχει 5 € και ο Νίκος 15 €, πόσες φορές περισσότερα έχει ο Νίκος.
- Το MSN σε αυτή την εταιρεία στοιχίζει 10 λεπτά και στην άλλη 40, πόσες φορές ακριβότερο είναι;

Δραστηριότητες για την Ισότητα λόγων με πίνακες - πολλαπλασιαστής

- Το χαρτζιλίκι του Θανάση είναι 20€ την εβδομάδα. Πόσα παίρνει σε ένα μήνα (4 βδομάδες);

βδομάδα	1	4
Χαρτζιλίκι σε €	20	80

Επί 20

- Ένα αναψυκτικό στοιχίζει 3€, πόσο στοιχίζουν τα 3 αναψυκτικά;

αναψυκτικό	1	3
Τιμή σε €	3	9

Επί 3

- Ένα αυτοκίνητο καλύπτει 100 km σε 2 ώρες. Πόσα χιλιόμετρα θα κάνει σε 6 ώρες;

ώρες	2	6
Απόσταση σε km	100	300

Επί 50

- Για ένα φλιτζάνι σοκολάτα χρησιμοποιούμε 9 γραμ. σκόνη. Με 45 γραμ. σκόνη πόσα φλιτζάνια θα κάνουμε;

φλυτζάνια	1	5
Γραμ. σκόνη	9	45

Επί 9

2. *Πώς καταλαβαίνουμε ότι είναι αναλογία; Τι είναι ο λόγος;*

- Από 10 κιλά γάλα παίρνουμε 2 κιλά τυρί. Από 20 κιλά γάλα πόσο τυρί θα πάρουμε; Από 30; Από 50;

Κιλά γάλα	5	10	20	50
Κιλά τυρί	1	2	4	10

δια 5

- Συμπλήρωσε τον πίνακα (ακτινίδια και τιμή):

Κιλά	1	2	6	8	12
Τιμή σε €	3	6	18	24	36

Επί 3

- Πόσα ξοδεύεις;

μέρες	1	2	5	7	15
Έξοδα σε €	5	10	25	35	45

Επί 5

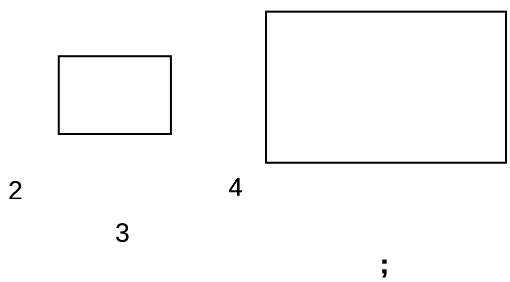
3. *Προβλήματα αναλογιών*

Δραστηριότητες με προβλήματα από πολλές και διαφορετικές καταστάσεις που χρησιμοποιούμε αναλογία. Ζητάμε να βρεθεί μία από τις 4 τιμές, χρησιμοποιούμε μικρούς αριθμούς ώστε τα παιδιά να τις υπολογίζουν όσο γίνεται με του νου. Χρησιμοποιούμε τον πίνακα για «οπτικοποίηση».

- εύρεση τιμής: στο φούρνο ένα κιλό ψωμί στοιχίζει 1,5 €. Πόσο θα πληρώσουμε για 2 κιλά;

κιλά	1	2
Τιμή σε €	1,5	;

- πρόβλημα γεωμετρίας: Μεγαλώνοντας το σχήμα που ακολουθεί η πλευρά που ήταν 2 cm έγινε 4 cm. Πόσο θα γίνει η πλευρά που είναι 3 cm;



- πρόβλημα φυσικής: ένας ποδηλάτης έκανε σε 3 ώρες 60 χιλιόμετρα. Τα 30 χιλιόμετρα σε πόσες ώρες τα κάνει;

ώρες	3	;
χιλιόμετρα	60	30

- Μία συνταγή για ένα γλυκό γράφει ότι χρειάζεται 2 φλυτζάνια ζάχαρη, 3 αυγά και 5 φλιτζάνια αλεύρι. Πόση ποσότητα από το κάθε είδος θα έβαζες αν ήθελες να κάνεις τη διπλάσια ποσότητα και πόσα αν ήθελες την τριπλάσια;

	συνταγή	διπλάσια;	τριπλάσια;
ζάχαρη	2		
αυγά	3		
αλεύρι	5		

4. *Σύγκριση λόγων*

- Σε ένα ποτήρι που έχει 24 γραμμάρια πορτοκαλάδα βάλαμε 3 κουταλιές ζάχαρη και σε μια άλλη που είναι 40 γραμμάρια βάλαμε 4 κουταλιές ζάχαρη. Ποια πορτοκαλάδα είναι πιο γλυκιά;

γραμμάρια	24	40
ζάχαρη	3	4

- το ίδιο με τιμές και συσκευασίες.

5. *Αντίστροφη αναλογία*

Τα προβλήματα όπως αναφέρθηκε χρειάζεται να δείχνουν με σαφήνεια το διαφορετικό νόημα και να στηρίζονται στις εμπειρίες των παιδιών. Χρησιμοποιούμε επίσης πίνακες:

- Έχεις 10 καραμέλες και αν τρως μία κάθε μέρα θα σου φτάσουν για 10 μέρες. Σε πόσες μέρες θα τις έχεις φάει αν τρως 2 κάθε μέρα;

Καραμέλες τη μέρα	1	2
μέρες	10	;

Σταθερό γινόμενο 10 καραμέλες

- Ο πατέρας σου δίνει 60 € σε σένα και στον (στην) αδελφό (ή) σου τη βδομάδα. Πόσα παίρνετε ο κάθε ένας. Αν είχατε ακόμα ένα αδελφό με το ίδιο ποσό, πόσο θα παίρνατε ο καθένας;

παιδιά	2	3
Χαρτζιλίκι του καθένα	30	;

Σταθερό γινόμενο 60 €

- Η μητέρα σου ανέθεσε να καθαρίσεις το δωμάτιό σου και συ νομίζεις ότι σου χρειάζονται 3 ώρες. Αν τα κάνατε μαζί με το φίλο σου πόση ώρα θα σου χρειαζόταν; Αν ερχόταν 2 φίλοι;

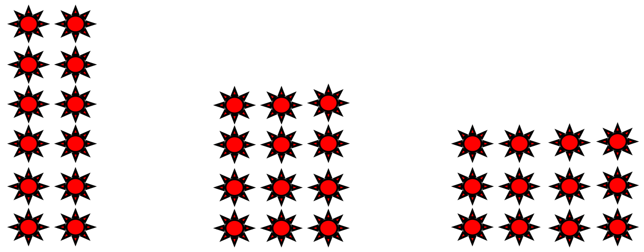
παιδιά	1	2	3
Ώρες	3	;	;

Σταθερό γινόμενο 3 ώρες

- Στον κήπο του σχολείου ομάδες μαθητών ανέλαβαν να φυτέψουν λουλούδια. Στην κάθε ομάδα δόθηκαν 12 λουλούδια. Η πρώτη ομάδα πήρε ένα μέρος τα έβαλε ανα 2, η δεύτερη ανά 3, η τρίτη ανά 4. Πόσες σειρές έφτιαξε η κάθε ομάδα;

λουλούδια	2	3	4
σειρές	6	;	;

Σταθερό γινόμενο 12



2 3 4

Γραφικής παράστασης αναλογίας		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
	Να σχεδιάζουν ένα σύστημα ημιαξόνων. Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου. Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες	Εύρεση συντεταγμένων σημείου και αντίστροφα.
	Να αναπαριστούν γραφικά μια σχέση αναλογίας και να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο ανάλογων ποσών βρίσκονται σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων	Γραφική παράσταση μιας σχέσης αναλογίας.

Ιδιαιτερότητες εννοιών

Το σύστημα συντεταγμένων μπορεί να προσεγγισθεί με ευκολία από τους μαθητές μέσα από παιχνίδια ή προβλήματα αναζήτησης θέσης. Το τετραγωνισμένο χαρτί μπορεί να υποστηρίξει την προσέγγιση αυτή.

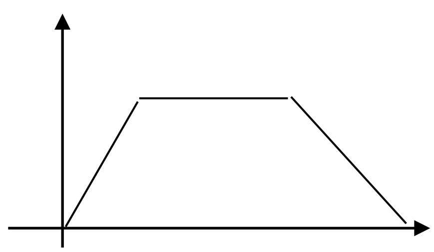
Το σύστημα συντεταγμένων μπορεί επίσης να συνδυασθεί με την αριθμητική γραμμή αρκεί να γίνει κατανοητή η κοινή αρχή από το 0 και η ισότητα των διαστημάτων. Επιδίωξη της ενότητας αυτής είναι να μπορούν οι μαθητές να σχεδιάζουν για γραφική παράσταση από πίνακες τιμών, όπως και να εξάγουν συμπεράσματα από μία γραφική παράσταση. Οι παραστάσεις συνδέονται με πραγματικές καταστάσεις των οποίων δίνουν μια συνοπτική εικόνα και η ανάγνωση μια παράστασης είναι σημαντικό να κατακτηθεί από τους μαθητές.

Δυσκολίες των μαθητών

Η δημιουργία ενός συστήματος αξόνων δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Ωστόσο σε μία γραφική παράσταση οι μαθητές εμφανίζουν κοινές αντιδράσεις για παράδειγμα:

- Δίνουν ένα «σημειακός» χαρακτήρας στις παραστάσεις που κατασκευάζουν ιδιαίτερα από πίνακες τιμών, δηλαδή τοποθετούν σημεία και δεν χαράζουν καμπύλες.
- Περιορίζουν τη χάραξη που πραγματοποιούν στο πρώτο τεταρτημόριο και την αντιλαμβάνονται όχι ως ευθεία αλλά ως ευθύγραμμο τμήμα.
- Συχνά χρησιμοποιούν κλίμακες (στους άξονες) προσαρμοσμένες στο πρόβλημα με ισότητες.

Η ανάγνωση των γραφικών παραστάσεων παρουσιάζει επίσης κάποιες δυσκολίες μεταφορές γεωμετρικών χαρακτηριστικών ή χαρακτηριστικών χάραξης στις γραμμές. Για παράδειγμα τον πίνακα ταχύτητας- χρόνου, μπορεί να αντιληφθούν ως μετακίνηση: το κινητό ανεβαίνει, μετά πηγαίνει ίσια και μετά κατεβαίνει.



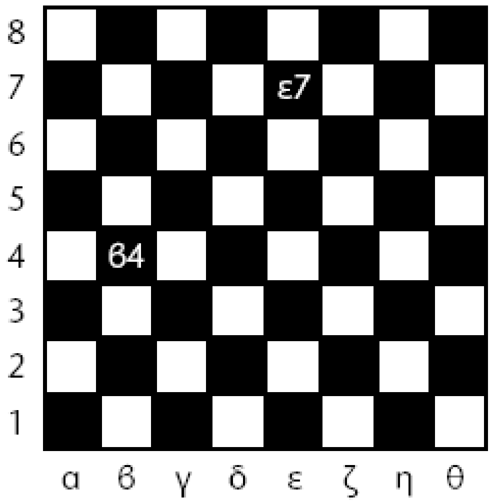
Διδακτικές υποδείξεις

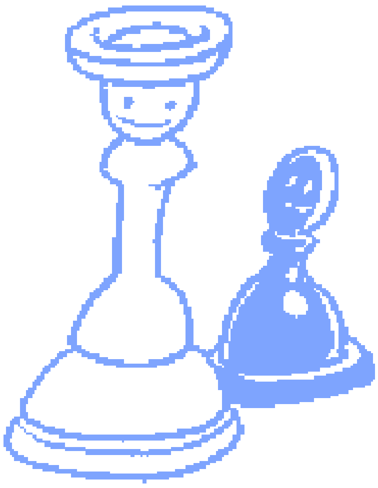
Πραγματικές καταστάσεις και παιχνίδια μπορούν να εισάγουν τους μαθητές στα συστήματα αξόνων, τα οποία στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρουσίαση μιας σχέσης από πίνακες τιμών.
Μελετώνται συνεχείς γραμμές για να ξεπεράσουν οι μαθητές τη σημειακή αντίληψη, όπως και παραδείγματα από τη φυσική ή καθημερινές καταστάσεις διαγραμμάτων για να δώσουν τις ερμηνείες που αντιλαμβάνονται και να προσεγγίσουν τις πληροφορίες που αποδίδει μια γραφική παράσταση.

Ενδεικτικές δραστηριότητας

Δραστηριότητα 1^{η}

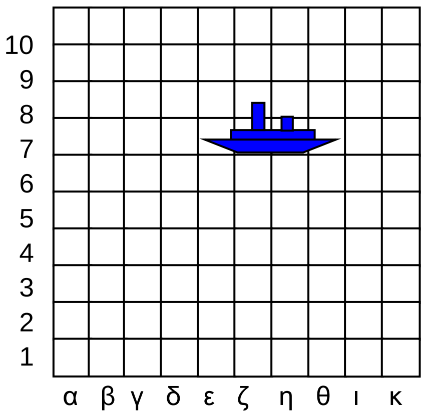
Πώς παριστάνονται τα πιόνια στη σκακιέρα του σχήματος;





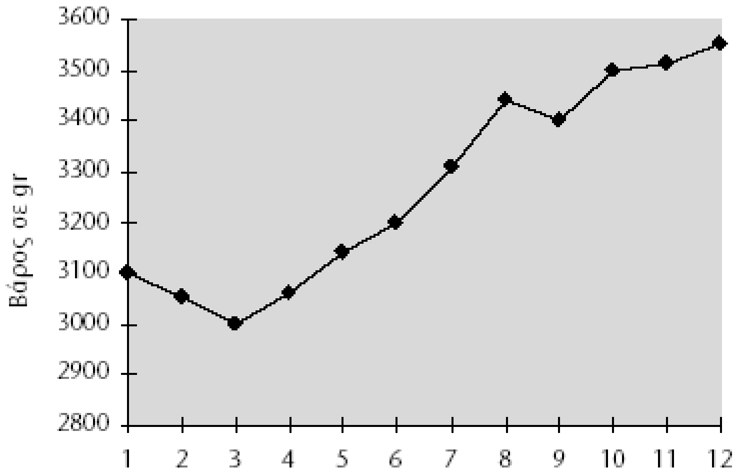
Δραστηριότητα 2^{η}

Ναυμαχία ονομάζουμε ένα παιχνίδι όπου ο κάθε παίχτης τοποθετεί σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί που το έχει σχεδιάσει όπως φαίνεται στο σχήμα, 6 καράβια. Ο κάθε παίχτης χωρίς να βλέπει το στόλο του αντιπάλου του, υποδεικνύει ένα τετράγωνο στο σχέδιο. Αν βρίσκεται εκεί ένα καράβι το βυθίζει, αν όχι παίζει ο άλλο παίχτης. Κερδίζει αυτός που καταφέρνει να βυθίσει όλο στο στόλο του αντιπάλου του.



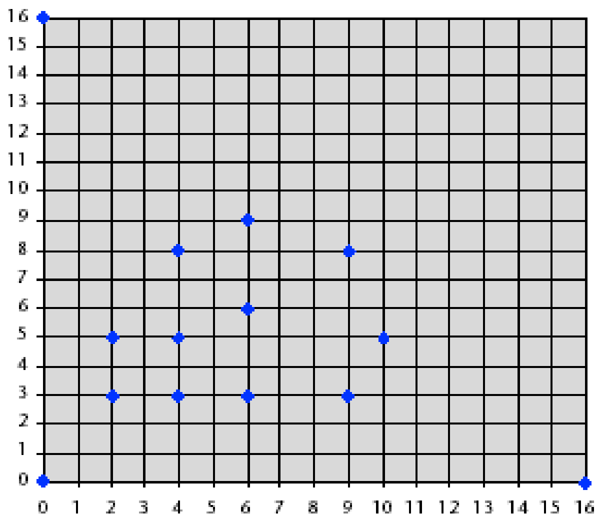
Δραστηριότητα 3η

Στον πίνακα φαίνεται το βάρος ενός νεογέννητου τις πρώτες η-μέρες της ζωής του. Συμπλήρωσε τον πίνακα χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση.



Δραστηριότητα 4η

- Να γράψεις τα ζεύγη αριθμών που ορίζουν τα σημειωμένα με τελείες σημεία και να τα ονομάσεις με γράμματα.
- Ποια από αυτά τα σημεία είναι κορυφές τετραγώνου; Να τα ονομάσεις.



Δραστηριότητα 5η

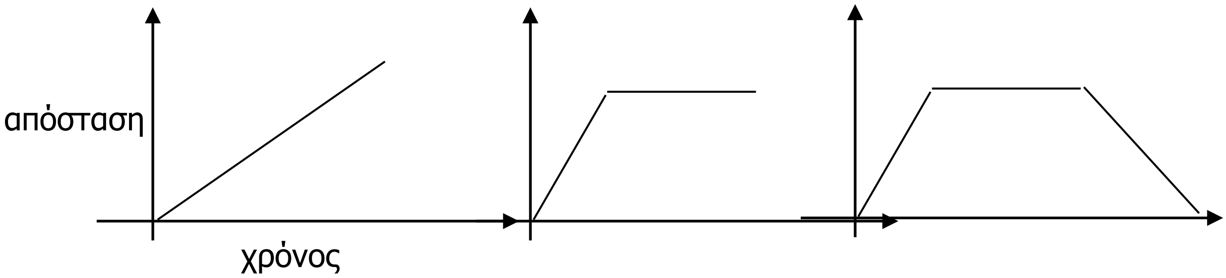
Κάνε ένα πίνακα για να δείξεις πόσα ξοδεύεις:

μέρες	1	2	5	7	15
Έξοδα σε €	5	10	25	35	45

Επί 5

Δραστηριότητα 6η

Ποια γραφήματα δεν μπορούν να περιγράψουν ένα ταξίδι, εξήγησε γιατί;



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Διάλεξε: **Σωστό** **Λάθος**

- Τα ζεύγη (3, 5) και (5, 3) παριστάνονται στο σύστημα ημιαξόνων με δύο διαφορετικά σημεία. ☐ ☐
- Το σημείο (0 , 5) βρίσκεται πάνω στον άξονα Οx. ☐ ☐
- Το ζεύγος $(\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$ αντιστοιχίζεται σε δύο σημεία του συστήματος των ημιαξόνων. ☐ ☐

- **Ρητοί αριθμοί και πράξεις**

Γραφή – Συμβολισμός Αντίθετοι αριθμοί - Σύγκριση - Διάταξη		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Προσαρμογή στόχων**
Να τοποθετούν τους φυσικούς αριθμούς, τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα στην αριθμητική ευθεία. Να συγκρίνουν και διατάσσουν φυσικούς αριθμούς, δεκαδικούς και κλάσματα.	Να αντιληφθούν την ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών Να αντιληφθούν την έννοια του αντίθετου αριθμού Να αντιληφθούν την έννοια της απόλυτης τιμής Να μπορούν να συγκρίνουν ρητούς	Αναγνωρίζουν την ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών Απεικονίζουν τους αρνητικούς αριθμούς στον άξονα των πραγματικών αριθμών Αναγνωρίζουν ότι οι αντίθετοι αριθμοί ισαπέχουν από την αρχή του άξονα Διατάσσουν αρνητικούς αριθμούς

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Οι αρνητικοί αριθμοί είναι μία από τις έννοιες που απαιτούν εννοιολογική ανακατασκευή των αριθμητικών σχημάτων των μαθητών. Η ανάγκη επέκτασης του συνόλου των αριθμών προκειμένου να συμπεριληφθούν και οι αρνητικοί αριθμοί δεν είναι μια εύκολη διαδικασία για πολλούς μαθητές και οπωσδήποτε για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες λόγω της αφηρημένης φύσης τους και της δυσκολίας αισθητοποίησής τους.

Οι δυσκολίες με τους αρνητικούς είναι αναμενόμενες καθώς αν και αναγκαίοι καθυστέρησαν ιδιαίτερα ιστορικά να αναπτυχθούν. Χαρακτηριστική είναι η αναφορά του Lazare Carnot (1753-1823) μέλος της Ακαδημίας και επιστημών που έλεγε: *« ...μια αρνητική ποσότητα σημαίνει να μετακινήσεις κάτι από το τίποτα! Αυτή είναι μια αδύνατη πράξη»!* (Boye, 1995).

Συχνά η θεμελίωση των φυσικών αριθμών με αρχή το 0 εμποδίζουν τόσο την επέκταση του συνόλου των αριθμών στους αρνητικούς όσο και την αναγνώριση τους ως ιδιαίτερους αριθμούς.

Ωστόσο η χρήση τους σε καθημερινές καταστάσεις όπως και η χρήση των αριθμομηχανών μπορεί να στηρίξει την προσέγγισή τους από τους μαθητές.

Δυσκολίες των μαθητών

Οι δυσκολίες των μαθητών στην προσέγγιση της έννοιας των αρνητικών αριθμών συνδέονται με:

1. Τη δυσκολία διαφοροποίησης των συμβόλων ‘’ - ‘’ και ‘’ + ‘’ ως προσήμων και ως ενδεικτικών συμβόλων πράξεων.
2. Τη δυσκολία ταυτοποίησης των συμβόλων π.χ. 5 και + 5 , αλλά ταυτόχρονα και διαφοροποίησης των συμβόλων π.χ. 5 και -5
3. Την αδυναμία κατανόησης, ως αποτέλεσμα μιας μηχανιστικής ερμηνείας του προσήμου , ότι ‘’’ - ‘’ μπροστά από μία μεταβλητή χ δεν σημαίνει αναγκαία ότι ο ‘’- χ ‘’ είναι αρνητικός ΄ , ούτε ότι ο χ μπορεί να είναι αρνητικός αν και δεν έχει πρόσημο ‘’ - ‘’.
4. Την δυσκολία χρήσης του συμβόλου του προσήμου και της απόλυτης τιμής, ιδιαίτερα από μαθητές που παρουσιάζουν προβλήματα ‘’χωρικού προσανατολισμού’’ *(Spatial problems)* και ‘’ λεπτής κινητικότητας’’.
5. Την δυσκολία κατανόησης του μηδενός που είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών

Διδακτικές υποδείξεις:

Οι μαθητές δυσκολεύονται να περάσουν από το επίπεδο των συγκεκριμένων αναφορών στην αφηρημένη συμβολική αναπαράστασή τους. *Για παράδειγμα,* ένα χρέος 5 ευρώ είναι λιγότερα χρήματα από ένα κέρδος 2 ευρώ, αλλά αυτό δεν οδηγεί αυτόματα τους μαθητές να γράψουν: -5<2.

Για το λόγο αυτό προτείνεται διδακτικά η αναφορά σε αρνητικές ποσότητες και όχι σε αρνητικούς αριθμούς. Οι αριθμοί είναι για τους μαθητές πάντα θετικοί, (με δεδομένη την εισαγωγή τους από τις ποσότητες) και οι αρνητικές δύσκολα αποκτούν νόημα. Οι αρνητικές ποσότητες μπορούν να ορισθούν σαν αντίθετες των θετικών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα, η κίνηση στην αντίθετη κατεύθυνση, το χρέος - οφειλή - ζημιά έναντι κέρδους κλπ.

Η συχνή εισαγωγική παρουσίαση των αρνητικών αριθμών μέσα από τις θερμοκρασίες και τις σχετικές κλίμακες δεν καλύπτουν εννοιολογικά την έννοια των αρνητικών αριθμών, δεδομένου ότι η θερμομετρική κλίμακα είναι αυθαίρετη (και διαφορετική πχ. από την Kelvin), το 0 της δεν εκφράζει το άθροισμα αντιθετών θερμοκρασιών, ενώ το απόλυτο 0 δεν αντιστοιχεί με το 0 της κλίμακας. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν για εξοικείωση με το συμβολισμό.

Η έννοια των αντίθετων αριθμών είναι σημαντική για την κατανόηση των αρνητικών και πρέπει να γίνει πλήρως κατανοητό από τους μαθητές ότι στα ζεύγη αντίθετων, ο ένας αναιρεί τον άλλο.

Προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες με τους αρνητικούς αριθμούς προτείνεται τη χρήση συγκεκριμένων αναπαραστατικών μοντέλων που επιτρέπουν στους μαθητές τη δημιουργία των κατάλληλων αναπαραστάσεων. Ως καταλληλότερα μοντέλα μπορούν να θεωρηθούν αυτά του «χρέους-κέρδους», «δεξιά-αριστερά», «πάνω-κάτω», «θερμό-κρύο» κτλ.

Οι νοερές δραστηριότητες ενδείκνυνται για την δημιουργία μιας διαισθητικής αντίληψης και προετοιμασίας των μαθητών για τις δραστηριότητες που ακολουθούν.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Προφορικές και νοερές

- Πότε μια ζυγαριά ισορροπεί; Δώσε συγκεκριμένα παραδείγματα

- Αν ψωνίσεις χωρίς λεφτά από το κυλικείο του σχολείου σου πράγματα αξίας 2 €, πόσα € χρωστάς; Πόσα € πρέπει να φέρεις την επόμενη μέρα για να «διαγραφεί» το χρέος σου;
- Αν ψωνίσεις χωρίς λεφτά από το κυλικείο του σχολείου σου πράγματα αξίας 2 € μια μέρα και πράγματα αξίας 3 € την επόμενη χωρίς λεφτά, πόσα € θα χρωστάς; Πόσα € πρέπει να φέρεις για να «διαγραφεί» το χρέος σου;

Δραστηριότητα 1η

Ζωγράφισε ένα τμήμα της θάλασσας με ένα καράβι, ένα υποβρύχιο και ένα ελικόπτερο ή αεροπλάνο. όπως στο παρακάτω σχέδιο: (Αν υπάρχει η δυνατότητα εργαστηρίου θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μια διαφανή λεκάνη με νερό και ομοιώματα).

Ξεκινώντας από την επιφάνεια της θάλασσας, προσδιόρισε τη θέση του ελικοπτέρου και του υποβρυχίου στο ακόλουθο σχήμα, μετρώντας τις αποστάσεις και συμβολίζοντας τις:

Δραστηριότητα 2η

Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με 10 βολές τριών μαθητών στο μπάσκετ.

Μαθητής	*Επιτυχείς βολές*	*Ανεπιτυχείς βολές*	*ΤΕΛΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ*
Κώστας	**5**	**5**	**;**
Γιάννης	**7**	**3**	**;**
Αγγελική	**2**	**8**	**;**

Δραστηριότητα 3η

Στην παρακάτω εικόνα βλέπεις δύο ομάδες παιδιών να τραβούν το σκοινί

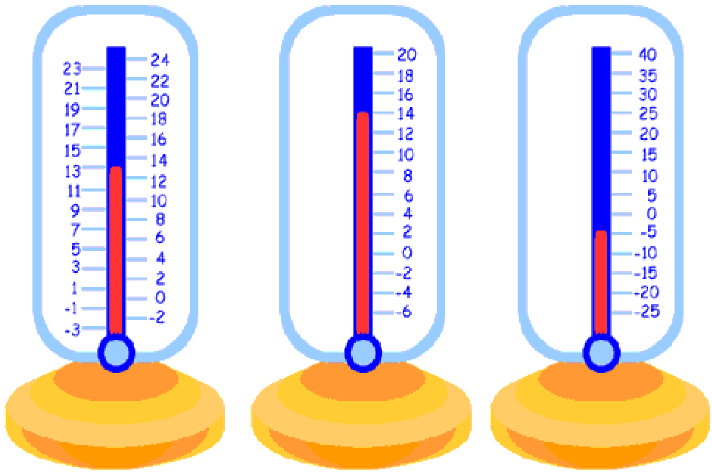
1. Αν καμία ομάδα δεν τραβάει την άλλη προς το μέρος της, τι πρέπει να συμβαίνει;
2. Αν μετρούσες τη δύναμη των μαθητών της μιας ομάδας και έβρισκες 20 μονάδες, μπορείς να πείς πόση θα είναι η δύναμη των μαθητών της άλλης ομάδας χωρίς να την μετρήσεις;

Πώς θα μπορούσες να ονομάσεις και να συμβολίσεις τις δυνάμεις:
- Των δύο μαθητών, ώστε χωρίς να τους βλέπεις να καταλαβαίνεις τι συμβαίνει;
- Των δύο ομάδων, ώστε χωρίς να τους βλέπεις να καταλαβαίνεις τι συμβαίνει;

(είναι δυνατό, πριν από τη δραστηριότητα να ζητηθεί από δύο μαθητές που έχουν περίπου την ίδια δύναμη, να δοκιμάσουν τη δραστηριότητα)

Δραστηριότητα 4η

Διάβασε στα θερμόμετρα τις ενδείξεις και εξήγησε τις. Συμβόλισε τις σε κάθε περίπτωση



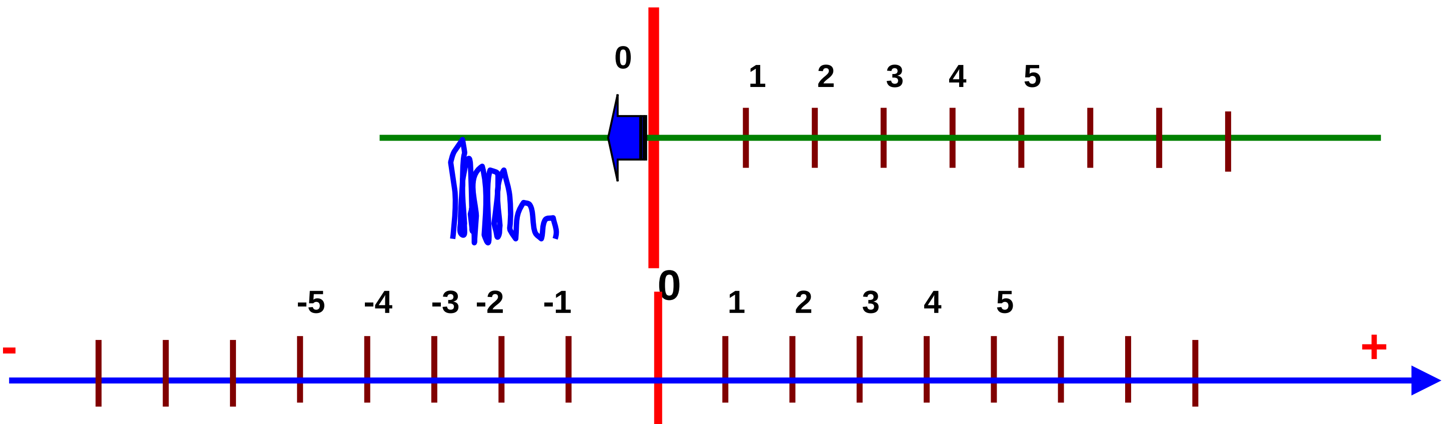
Δραστηριότητα 5η

Στη παρακάτω εικόνα σημειώνονται οι ημερήσιες θερμοκρασίες μια συγκεκριμμένη ημέρα.

Διάβασε τις και εξήγησε ποια περιοχή είναι πιο κρύα και γιατί;

Δραστηριότητα 6η

Τοποθέτησε πάνω στην αριθμογραμμή τους αριθμούς +3, $+\frac{1}{3}$, $\frac{5}{4}$, $2\frac{2}{3}$, 0 καθώς και τον αριθμό -2. Στη συνέχεια δοκίμασε να τοποθετήσεις και τους αριθμούς -1, -2, -3 κλπ.

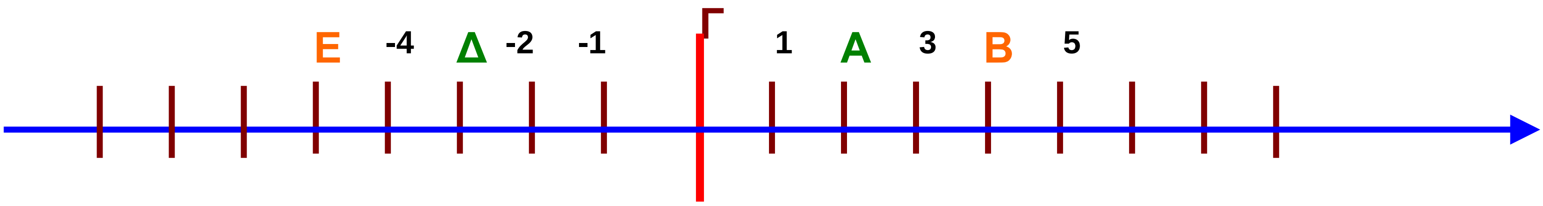


Πόσο απέχουν από το μηδέν τα παραστατικά σημεία των αριθμών +2 και -2 ; Πόσο απέχουν από το μηδέν τα παραστατικά σημεία των αριθμών +3 και -3; Τι παρατηρείς; Τι συμπεραίνεις;

(*Στο σημείο αυτό είναι δυνατό να εισαχθεί η έννοια της απόλυτης τιμής ως απόστασης από το σημείο μηδέν και να βοηθηθούν οι μαθητές να αναγνωρίσουν ότι η απόλυτη τιμή είναι πάντοτε θετικός αριθμός και οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές*)**.**

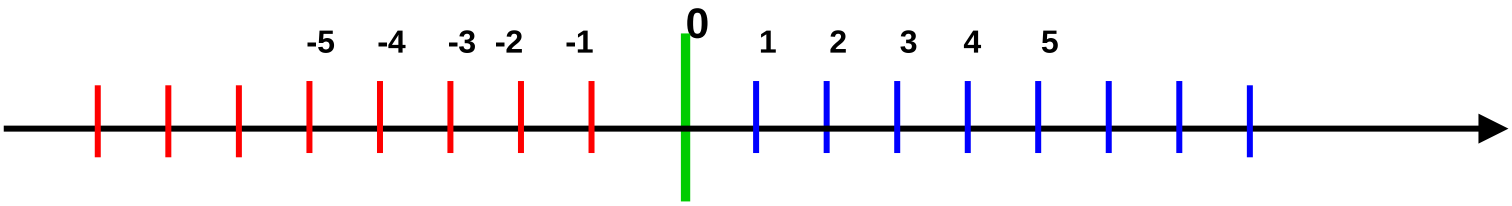
Δραστηριότητα 7η

Να βρεις ποιους αριθμούς παριστάνουν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάνω στην ευθεία των ρητών αριθμών:



Δραστηριότητα 8η

Στην παρακάτω ευθεία των ρητών αριθμών



- Από τα παρακάτω ζεύγη των αριθμών, ποιος από τους δύο απέχει *πιο πολύ* από το μηδέν:

+3 +1   +5 $+2\frac{1}{2}$ +4 +1,5

- Ώστε από δύο *άνισους θετικούς* ο μεγαλύτερος βρίσκεται……

- Από τα παρακάτω ζεύγη των αριθμών, ποιος από τους δύο απέχει πιο *λίγο* από το μηδέν:

-3 -1   -5 $-\frac{1}{3}$ $-3\frac{2}{3}$ -1,5

- Ώστε από δύο *άνισους αρνητικούς* ο μεγαλύτερος βρίσκεται………

- Από τα παρακάτω ζεύγη των αριθμών, ποιος από τους δύο είναι ο μεγαλύτερος;

-3 $+\frac{3}{2}$ $-\frac{11}{3}$ +2,6   -4 +5,5

Ώστε από *δύο ετερόσημους* αριθμούς ο μεγαλύτερος βρίσκεται……..

Πράξεις με ρητούς		
Στόχοι προηγούμενων τάξεων	**Στόχοι διδακτικής ενότητας**	**Τελικοί στόχοι για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες**
Προσθέτουν και αφαιρούν φυσικούς αριθμούς, δεκαδικούς και κλάσματα Πολ/ζουν και διαιρούν φυσικούς αριθμούς, δεκαδικούς και κλάσματα	Να προσθέτουν και να αφαιρούν ρητούς Να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις Να κάνουν απαλοιφή παρενθέσεων Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν ρητούς Να κατανοούν το πηλίκο δύο ρητών ως λόγο	Εντοπίζουν πώς προσθέτουμε και αφαιρούμε αρνητικούς αριθμούς μέσα από πραγματικές καταστάσεις Εντοπίζουν πώς πολ/ζουμε και διαιρούμε αρνητικούς αριθμούς μέσα από πραγματικές καταστάσεις

Ιδιαιτερότητες των Εννοιών

Η δυσκολία παροχής ιδιαίτερα ικανοποιητικών μοντέλων για την εξήγηση των κανόνων στα πρόσημα των ρητών προέρχεται από τις σχέσεις της φυσικής πραγματικότητας και της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ειδικότερα, τα προβλήματα στις πράξεις των αρνητικών αριθμών, εκτός των προβλημάτων που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα συνδέονται με τη δυσκολία κατανόησης της εννοίας των αρνητικών αριθμών και της μεταφοράς αντιλήψεων από τους θετικούς. Στην ενότητα αυτή επιδιώκεται να δοθεί ένα νόημα στις προσθαφαιρέσεις των ρητών αριθμών μέσα από δραστηριότητες. Επιδιώκεται επίσης μια προσέγγιση του πολ/σμού και της διαίρεσης,

Δυσκολίες των μαθητών

Οι μαθητές δυσκολεύονται να εκτελέσουν πράξεις με ρητούς αριθμούς, να απομνημονεύσουν τους κανόνες των πρόσημων και να εργασθούν στο διαδικαστικό επίπεδο. Οι καταγεγραμμένες κύριες δυσκολίες συνδέονται με

- Την έκφραση μεγεθών με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.
- Την αναπαράσταση ενός ρητού σε άξονα και αντίστροφα.
- Την κατανόηση της εννοίας των αντίθετων αριθμών και των σχετικών θέσεών τους πάνω στον άξονα.
- Την κατανόηση των κανόνων των προσήμων τόσο εννοιολογικά, όσο και λειτουργικά.

Κυρίως οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν γιατί (-1).(-1) = +1.

Διδακτικές υποδείξεις

Για την διευκόλυνση της κατανόησης στις πράξεις των ρητών ενδείκνυνται διακριτά μοντέλα *(*Hart,1993*)* και ειδικότερα τη χρήση των αριθμομηχανών για την αντιμετώπιση των αδυναμιών στους υπολογισμούς.

Ειδικά για την κατανόηση των πράξεων της πρόσθεσης και αφαίρεσης προτείνεται η χρήση του μοντέλου του άξονα των ρητών σε συνδυασμό με το μοντέλο της κίνησης.

Για την κατανόηση των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης προτείνεται:

- Σε εννοιολογικό επίπεδο, η χρήση του μοντέλου της θερμοκρασίας, καθώς και η χρήση του μοντέλου της κίνησης πάνω στον άξονα.
- Σε διαδικαστικό επίπεδο η χρήση της αριθμομηχανής ή του πίνακα αλληλοαναιρέσεων, καθώς και του μνημονικού βοηθήματος που ονομάζεται «απονομή δικαιοσύνης»

Ενδεικτικές δραστηριότητες

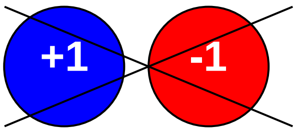
Προφορικές και νοερές δραστηριότητες

- Δύο αυτοκίνητα κινούνται με την ίδια ταχύτητα 50 χλμ. την ώρα πάνω στην εθνική οδό Αθηνών - Λαμίας. Το ένα πηγαίνει προς τη Λαμία και το άλλο προς την Αθήνα.
  Α) Πως θα συμβόλιζες τις ταχύτητές τους;
  Β) Αν το αυτοκίνητο που πηγαίνει προς τη Λαμία αυξήσει την ταχύτητα στα 70χλμ πόσο θα είναι το άθροισμα των ταχυτήτών τους
- Είσαι στο μετρό και κινείσαι με ταχύτητα 30 χλμ. την ώρα. Από το παράθυρο βλέπεις δίπλα σου να περνάει ένας άλλος συρμός που κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα 40 χλμ. την ώρα. Με τι ταχύτητα έχεις την αίσθηση ότι θα κινείσαι;
- Η τιμή της βενζίνης πέφτει μια μέρα κατά 0,2 λεπτά και την επόμενη κατά 0,3 λεπτά. Πόσο έπεσε συνολικά η τιμή της βενζίνης αυτές τις δύο μέρες; Με ποιο σύμβολο θα μπορούσες να εκφράσεις τη συνολική πτώση της τιμής της βενζίνης;

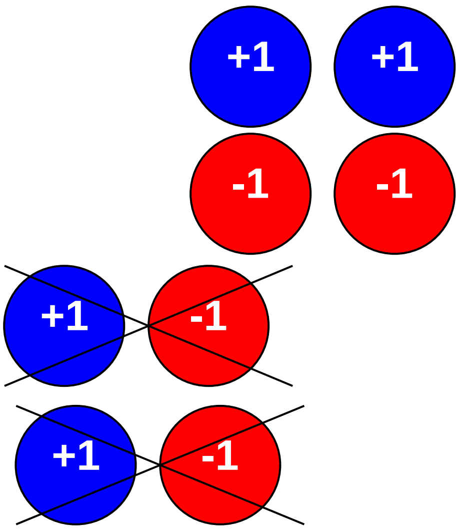
Δραστηριότητα 1η

(Χρησιμοποιούνται έγχρωμα αριθμητήρια δύο χρωμάτων για τη μοντελοποίηση θετικών και αρνητικών, το σετ από μπλε μπάλες για τους θετικούς και το σετ από κόκκινες μπάλες για τους αρνητικούς. Κάθε μπλε μπάλα αξίζει +1 και κάθε κόκκινη -1).

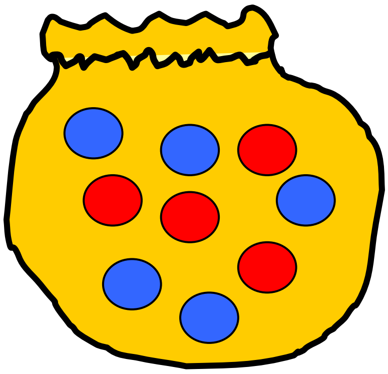
Πόσο αξίζει συνολικά ένα ζευγάρι που αποτελείται από μία μπλε και μία κόκκινη μπάλα; Γράψε συμβολικά την κατάσταση.

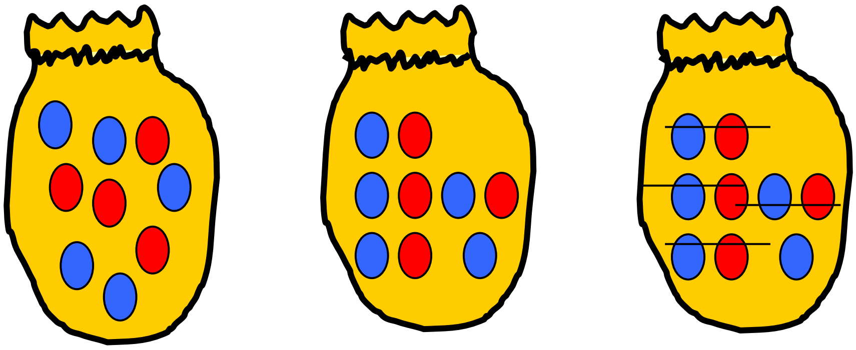


Πόσο αξίζουν συνολικά δύο ζευγάρια που αποτελούνται από 2 μπλε και 2 κόκκινες μπάλες; Γράψτε συμβολικά την κατάσταση



Σε ένα σακούλι έχουμε 5 μπλε και 4 κόκκινες μπάλες. Πόσο αξίζει συνολικά ; Γράψτε συμβολικά την κατάσταση και αιτιολόγησε την άποψή σου.

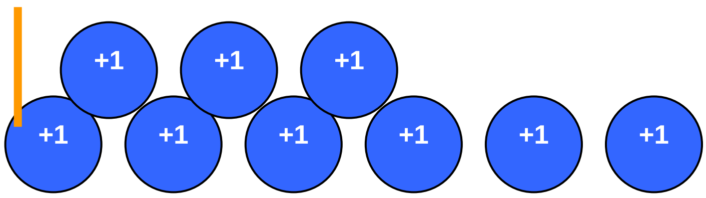




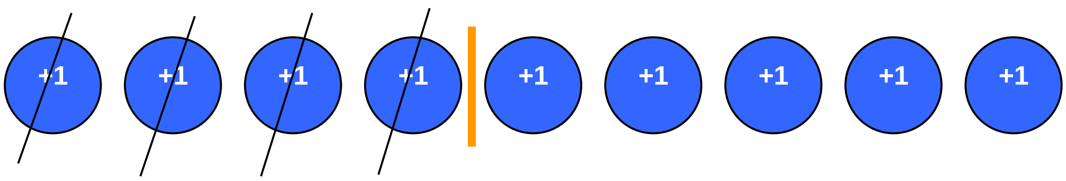
Δραστηριότητα $2^{η}$

(στην παρακάτω δραστηριότητα μπορούν οι μαθητές να βάψουν απομιμήσεις € σε μπλε και κόκκινα ώστε να βοηθηθούν στις πράξεις).

- Οι γονείς σου έδωσαν 6 € για να αγοράσεις από το κυλικείο. Στο διάλειμμα ένας φίλος σου επιστρέφει 3 € που σου χρωστούσε. Πόσα ευρώ έχεις τώρα;

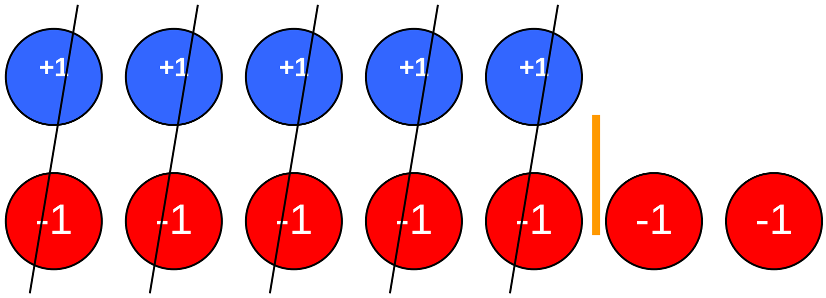


- Κατά τη διάρκεια του δευτέρου διαλείμματος του σχολείου ψωνίζεις πράγματα αξίας 4 €. Πόσα σου μένουν;

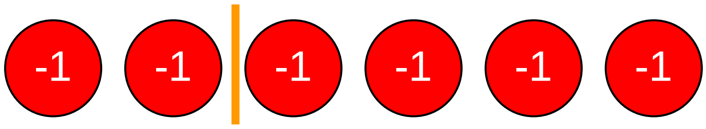


- Κατά τη διάρκεια του τρίτου διαλείμματος του σχολείου ψωνίζεις κι' άλλα πράγματα αξίας 7 €. Πόσα € έχεις τώρα;

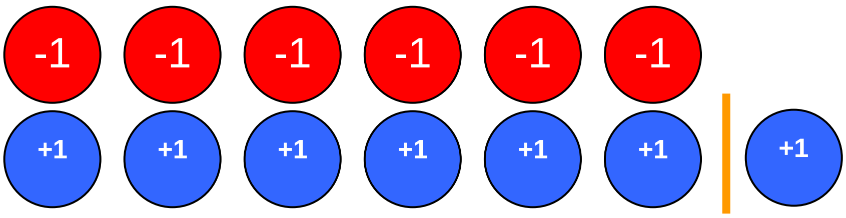
Πόσο κάνει: 5 - 7 ; Πως ερμηνεύεις το αποτέλεσμα;



- Κατά τη διάρκεια του τελευταίου διαλείμματος του σχολείου ψωνίζεις κι' άλλα πράγματα αξίας 4 €. Πόσα € έχεις τώρα;
  - Πόσο κάνει: -2 - 4;Πως ερμηνεύετε το αποτέλεσμα;



- Την επομένη ημέρα φέρνεις από το σπίτι 7 € και πληρώνεις όσα χρωστούσες από την προηγούμενη ημέρα. Πόσα ευρώ έχεις τώρα;
  - Πόσο κάνει: -6 + 7 ; Πως ερμηνεύετε το αποτέλεσμα;



Σημείωση

1. Κρίνεται σκόπιμο να αναζητηθεί από τους μαθητές μία στρατηγική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις περιπτώσεις πρόσθεσης ετεροσήμων, δηλαδή από το μεγαλύτερο (κατά απόλυτη τιμή) αφαιρούμε το μικρότερο και το αποτέλεσμα έχει το πρόσημο του μεγαλύτερου (κατά απόλυτη τιμή), αλλά αποφεύγεται να δοθεί ως μνημονικός κανόνας

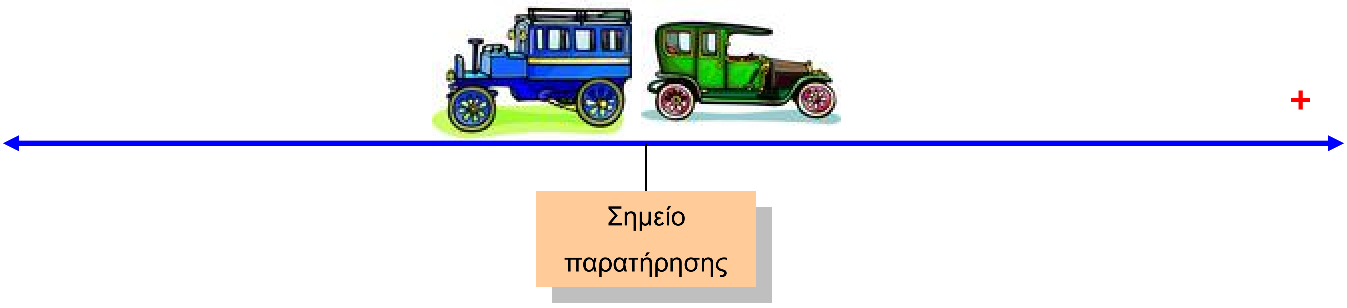
2. Μπορεί επίσης να συζητηθεί η διαφορετική ερμηνεία των συμβόλων «+» και «-» στις πράξεις ως προσήμων και ως σημείων δηλωτικών των πράξεων.

Για παράδειγμα:

(+ 5)	**+**	**(- 3)**	**= +2**
Πρόσημο	**Σύμβολο πράξης**	**Πρόσημο**	**Πρόσημο**

Δραστηριότητα 3η

Υπόθεσε ότι βρίσκεσαι σε ένα σημείο στην Εθνική οδό και παρατηρείς τα αυτοκίνητα που κινούνται και προς τις δύο κατευθύνσεις.



Υποθέτουμε ακόμα ότι το σημείο παρατήρησης είναι στο μηδέν, δύο αυτοκίνητα κινούνται το ένα προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα 50 χλμ/ώρα:

- Πως θα συμβολίσεις τις ταχύτητές τους ώστε εκτός από το μέτρο τους να έχουμε και την πληροφορία της κατεύθυνσης της κίνησής τους;
- Που θα βρίσκεται το αυτοκίνητο που ταξιδεύει ***προς τα δεξιά*** μετά από 2 ώρες;
- Που θα βρίσκεται το αυτοκίνητο που ταξιδεύει ***προς τα αριστερά*** μετά από 2 ώρες;
- Αν ένα αυτοκίνητο περάσει από μπροστά σου ***προς τα δεξιά***, που βρισκόταν 2 ώρες πριν;
- Αν ένα αυτοκίνητο περάσει από μπροστά μας ***προς τα αριστερά***, που βρισκόταν 2 ώρες πριν;

Παρουσίασε συμβολικά τις απαντήσεις σου.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

1. Τοποθέτησε πάνω στην αριθμογραμμή τους αριθμούς:

3 -5 0 -0,5 3/2 -5/4 -1 2,4 -3,5

2. Χωρίς να βρεις το αποτέλεσμα, υπολόγισε αν είναι θετικό ή αρνητικό

	+	-
12 - 18		
-23 – 15		
-20 + 30		
15 . (-2)		
(-7). (-4)		
(-45):5		